

Dependencia	Población	Número de vacantes
Idem	Palencia	Una.
Idem	Palma de Mallorca	Una.
Idem	San Sebastián	Una.
Idem	Santa Cruz Tenerife	Una.
Idem	Segovia	Una.
Idem	Sevilla	Dos.
Idem	Tarragona	Una.
Idem	Teruel	Una.
Idem	Toledo	Una.
Idem	Vitoria	Una.
Idem	Zamora	Una.
Idem	Zaragoza	Dos.
Delegación Local	Cartagena	Una.
Idem	Gijón	Una.
Idem	Santiago Compostela	Una.
Idem	Vigo	Una.

Para la asistencia al presente concurso y resolución del mismo, se observarán las siguientes normas:

Primera.—Las papeletas se elevarán ajustadas al modelo publicado en el «Boletín Oficial del Estado» número 51, de 28 de febrero del pasado año para el año 1959, y se cursarán directamente al Registro General de Entrada de esta Presidencia del Gobierno durante un plazo de treinta días, contado a partir del siguiente al de la fecha de publicación de la presente Orden en el «Boletín Oficial del Estado». No serán estimadas las peticiones que pudieran recibirse después de finalizado este plazo.

Segunda.—Las plazas serán adjudicadas entre los concurrentes por orden de mayor categoría administrativa y, dentro de ella, por rigurosa antigüedad de servicios; si bien, entre los solicitantes se establecerán los dos turnos, distintos entre sí, que a continuación se expresan:

a) En el se observará cuanto se dispone en el artículo tercero de la Orden de 18 de abril de 1959 y, consecuentemente, estará integrado por cuantos hubieren obtenido su actual destino con carácter forzoso y por aquellos que habiéndolo conseguido voluntariamente lleven sirviéndolo de modo efectivo más de dos años el día que se extinga el plazo de admisión de papeletas al presente concurso.

b) Estará integrado por el resto de los solicitantes.

El turno a) será preferente, recurriéndose sólo al examen de las papeletas encuadradas en el turno b), una vez que se hayan extinguido todas las correspondientes al turno a).

Tercera.—De conformidad con el párrafo tercero, artículo tercero del Decreto de 23 de marzo de 1957, las plazas correspondientes a servicios dependientes del Ministerio de Asuntos Exteriores, así como de las que pudieran producirse por reemplazos en esta Presidencia del Gobierno, se proveerán por libre elección entre los solicitantes de las mismas.

Cuarta.—Para la aplicación del derecho de consorte se tendrán en cuenta las normas contenidas en el artículo segundo, párrafo cuarto del Decreto de 14 de marzo de 1957 («Boletín Oficial del Estado» número 75, de 16 del mismo mes y año).

Lo digo a VV. II. y a VV. SS. para conocimiento y cumplimiento.

Díes guarde a VV. II. y a VV. SS. muchos años.  
Madrid, 19 de julio de 1963.—P. D. R. R.—Benítez de Lugo.

Ilmos. Sres. Subsecretarios, Directores generales y Oficial Mayor de este Departamento.—Sres. ...

## MINISTERIO DEL AIRE

ORDEN de 22 de julio de 1963 por la que se hacen públicos los programas modificados de las materias que componen el segundo grupo para exámenes de ingreso en la Academia General del Aire.

Quedan modificados los programas de Análisis matemático, Geometría y Trigonometría, materias que forman el segundo grupo para los exámenes de ingreso en la Academia General del Aire y que fueron publicadas como anexo al «Boletín Oficial del Ministerio del Aire» número 137, de fecha 15 de noviembre de 1958.

A continuación se publican los nuevos programas de dichas materias, que entrarán en vigor a partir de la vigésima convocatoria de ingreso en dicho Centro.  
Madrid, 22 de julio de 1963.

LACALLE

### PROGRAMA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

#### NÚMERO NATURAL

##### Introducción del concepto del número

Método genético.—Conjuntos. definiciones.—Coordinación de conjuntos.—Principio de inducción completa.—Conjuntos no ordenables.—Serie natural.—Números ordinales y cardinales.—Comparación de los números.—Operaciones aritméticas.—Notación.

##### Operaciones con números naturales

Adición y multiplicación.—Agregación de conjuntos.—Símbolo cero.—Leyes formales de la adición.—Ley de monotonía.—Producto de números naturales.—Leyes formales de la multiplicación.—Ley de monotonía.—Introducción al cálculo literal.—Primeros principios.—Producto de sumas

Sustracción y división.—Diferencia de dos números naturales. Propiedades de la sustracción.—Ley de monotonía de la sustracción.—Cociente exacto.—Múltiplos de un número.—Ley de monotonía de la división exacta.—División entera.—Propiedades.

Potenciación.—Potenciación.—Cálculo con potencias.—Aplicaciones.—Operaciones inversas de la potenciación.

##### Algoritmo de la numeración

Sistemas fundados en el valor relativo.—Expresión polinómica de los números.—Expresión de los números en el sistema de base  $n$ .—Comparación de números.—Paso de un sistema de numeración a otro.

##### Práctica de las operaciones aritméticas

Adición.—Tabla de sumar.—Sustracción.—Multiplicación.—Tabla de multiplicar.—División.—Radicación.—Raíz cuadrada.

#### TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD NUMÉRICA

##### Principios fundamentales

Definiciones y teoremas.

##### Máximo común divisor

Definición.—Principios en que se funda la obtención de máximo común divisor de dos números.—Algoritmo de Euclides.—Propiedades del máximo común divisor de dos números.—Máximo común divisor de varios números.—Propiedades del máximo común divisor de varios números.

##### Mínimo común múltiplo

Múltiplos comunes a dos números.—Propiedades del mínimo común múltiplo de dos números.—Principios en que se funda la obtención del mínimo común múltiplo de varios números.—Propiedades del mínimo común múltiplo de varios números.

##### Números primos y compuestos

Definiciones.—Descomposición factorial de un número.—Criterio de divisibilidad.—Cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.—Divisores de un número.—Sucesión de los números primos.—Tabla de los números primos.—Modo de reconocer si un número es primo o compuesto.

##### Números congruentes

Definición.—Teorema fundamental.—Operaciones fundamentales con congruencias.

##### Números incongruentes

Sistema de números incongruentes.—Teorema fundamental.—Indicador de un número.—Cálculo del indicador.—Congruencias de Euler y Fermat.

##### Restos potenciales

Definición y cálculo.—Primer, segundo y tercer casos.—Aplicación.

##### Criterios de divisibilidad

Criterio general.—Criterios de divisibilidad por 2, 5, 4, 25, 8, 125.—Criterios de divisibilidad por 3, 9, 11, 7.—Comprobación de las operaciones aritméticas.—Prueba de los nueve.

#### NÚMERO RACIONAL

##### Introducción

Necesidad de nuevos números.—Fracciones.—Primeras propiedades.—Simplificación de fracciones.—Reducción de fracciones a un común denominador.—Número racional.—Campo de los números racionales.—Módulo o valor absoluto.

##### Operaciones en el campo de los números racionales

Introducción.—Adición.—Suma de fracciones.—Leyes formales.—Suma de números racionales.—Sustracción.—Números

opuestos.—Diferencia de números racionales.—Aplicaciones.—Comparación de números racionales.—Caracteres de la desigualdad.—Ley de monotonía.—Valor absoluto de una suma algebraica. *Multiplicación*.—Producto de fracciones.—Leyes formales.—Producto de números racionales.—Valor absoluto del producto.—Cálculo literal.—*División*.—Números recíprocos.—Cociente exacto de números racionales.—Ley de monotonía.—Producto y cociente de desigualdades.—*Potenciación y operaciones inversas*.—Potencia de exponente natural.—Conclusión.

#### NÚMERO REAL

##### Introducción

Consideraciones previas.—*Sucesiones indefinidas*.—Sucesiones.—Pares de sucesiones monótonas convergentes.—Primeras propiedades de los pares de sucesiones monótonas convergentes. *Cortaduras*.—Cortaduras.—Número irracional.—Número real: igualdad y desigualdad.—Campo de los números reales.—*Números reales definidos por pares de sucesiones monótonas convergentes*.—Teoremas fundamentales.—Comparación de los números definidos por pares de sucesiones monótonas convergentes.

##### Operaciones en el campo de los números reales

Principio de permanencia.—*Adición*.—Definición.—Leyes formales.—*Sustracción*.—Números opuestos.—Diferencia de números reales.—Observación.—Teorema.—Ley de monotonía.—Módulo o valor absoluto.—Valor absoluto de una suma algebraica.—*Multiplicación*.—Definición.—Leyes formales.—Valor absoluto del producto.—*División*.—Números recíprocos.—Cociente exacto de números reales.—Ley de monotonía.—Producto y cociente de desigualdades.—*Potenciación de exponente natural*.—Potencia de exponente natural.—Conclusión.—*Radicación*.—Raíces aproximadas en menos de una unidad.—Raíces aproximadas en menos de 1 m. Raíces exactas de números reales.—Cálculo de radicales.—*Potenciación de exponente racional*.—Potencias de exponente racional positivo.—Potencias de exponente racional negativo.—Cálculo con potencias de exponente racional.—*Potenciación de exponente real*.—Clases contiguas de números reales.—Potencia de exponente real.—Cálculo con potencias de exponente real.—*Noiones previas sobre el concepto de función*.—Ligera idea sobre el concepto de función.—Representación gráfica.—Interpolación. Función exponencial.—Estudio de la variación de la función exponencial.—*Logaritmación*.—Definición de logaritmo.—Propiedades.—Función logarítmica.—Estudio de la variación de la función logarítmica.—Reglas del cálculo logarítmico.—Relación entre los logaritmos de bases distintas.—*Fracciones de términos reales*.—Razones.—Generalización de las operaciones.—Serie de fracciones iguales.—Medias aritmética, cuadrática geométrica y armónica

#### ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE MAGNITUDES

##### Conceptos generales

Introducción.—Conjuntos homogéneos.—Magnitud y cantidad. Magnitudes escalares.—Magnitudes absolutas y relativas.—Magnitudes racionales.—Magnitudes continuas o reales.—Generalización a las cantidades.

##### Concepto de medida

Cantidades comensurables con la unidad.—Cantidades incommensurables con la unidad.—Producto y cociente de una cantidad por un número.—Correspondencia entre las cantidades reales y los puntos de una recta.

##### Teoría de proporcionalidad

Introducción.—Magnitudes proporcionales.—Teorema fundamental de la proporcionalidad.—Cuestiones sobre la medida.—Razón de proporcionalidad.—Proporciones entre cantidades.—Interpretación geométrica de la proporcionalidad.—Magnitudes inversamente proporcionales.—Teorema fundamental de la proporcionalidad inversa.—Interpretación geométrica.—Proporcionalidad compuesta.—Teorema fundamental.

#### ARITMÉTICA FUNDAMENTAL

##### Números decimales

Definiciones.—Números decimales.—Suma y resta de números decimales.—Multiplicación.—Cociente de números naturales en menos de 1 10n.—División de un decimal por un entero.—División de dos números decimales.—Radicación de números decimales.

##### Expresiones decimales indefinidas

Fracciones ordinarias reducibles a decimales.—Expresiones decimales indefinidas.—Expresiones decimales periódicas.—Fracciones ordinarias equivalentes a expresiones periódicas puras y periódicas mixtas.—Fracciones generatrices de las expresiones decimales periódicas.—Aplicaciones.

##### Números aproximados. Principios fundamentales

Introducción.—Errores absoluto y relativo.—Cifras exactas de los valores aproximados.—Cálculo de las cotas de los errores ab-

soluto y relativo.—Obtención de valores aproximados con todas sus cifras exactas.

##### Operaciones con números aproximados

Errores de las operaciones aritméticas.—Cotas prácticas de error de los resultados de las operaciones aritméticas.—Problemas directo e inverso del cálculo con números aproximados.—Método de Guyou.—Reglas prácticas.

##### Logaritmos decimales

Características de los logaritmos decimales.—Mantisas de los logaritmos.—Tablas de logaritmos.—Problema inverso.—Aplicaciones del cálculo logarítmico.—Manejo de las tablas de logaritmos.

#### NÚMERO COMPLEJO

##### Introducción

Consideraciones previas.—Números complejos.—Representación gráfica.—Complejos iguales, conjugados y opuestos.—Módulo y argumento.

##### Operaciones en el campo de los números complejos

*Adición*.—Suma.—Leyes formales.—Producto de un número complejo por un número real.—Formas binómica, trigonométrica y módulo argumental.—Interpretación geométrica de la suma. *Sustracción*.—Diferencia.—Interpretación geométrica.—*Multiplicación*.—Producto.—Leyes formales.—Interpretación geométrica. *División*.—Cociente de complejos.—Interpretación geométrica.—*Potenciación de exponente entero*.—Potencias de exponente natural.—Interpretación geométrica.—Potencias de exponente entero negativo.—*Radicación*.—Raíces de los números complejos.—Interpretación geométrica.—Raíz cuadrada.—Raíces de la unidad.—Raíces primitivas de la unidad.—Raíces de los números reales.—*Potencias y logaritmos en el campo complejo*.—Potencias en base  $e$ .—Logaritmos neperianos.—Potencias de base y exponente complejos.

#### COMBINATORIA

##### Variaciones

*Definición*.—Formación y número de las variaciones.—Variaciones con repetición.

##### Permutaciones

Definición y número.—Inversiones de una permutación.—Permutaciones con repetición.

##### Combinaciones

Definición.—Número de combinaciones.—Formación de las combinaciones.—Combinaciones con repetición.—Números combinatorios y relaciones entre los mismos.—Triángulo aritmético.

##### Introducción al cálculo de probabilidades

Sucesos.—Conceptos de frecuencia y probabilidad.—Certeza, imposibilidad, probabilidades contrarias.—Probabilidad total.—Probabilidad compuesta.—Pruebas repetidas.—Postulado empírico.—Esperanza matemática.

#### CÁLCULO ALGEBRAICO

##### Conceptos preliminares

Monomios y polinomios.—Valor numérico de una expresión algebraica.—Clasificación de las expresiones algebraicas.—Expresiones equivalentes.—Operaciones con expresiones algebraicas.—Adición de monomios y polinomios.—Sustracción de monomios y polinomios.—Sumas algebraicas de monomios y polinomios.—Multiplicación de monomios.—Producto de un monomio por un polinomio.—Producto de polinomios.—Propiedades del producto de dos polinomios.—División de monomios.—División de un polinomio por un monomio.—División de polinomios de una variable.—División de polinomios de varias variables.—Forma típica de las expresiones enteras.

##### Potenciación de expresiones enteras

Potencia de un monomio.—Producto de binomios.—Potencia del binomio: fórmula de Newton.—Potencia de un polinomio: fórmula de Leibnitz.—Potencias de números complejos.

##### Radición de expresiones enteras

Raíces de monomios.—Raíces de polinomios.

#### DIVISIBILIDAD E IDENTIDAD DE EXPRESIONES ENTERAS

##### Divisibilidad algebraica

Definiciones.—Primeros principios.—Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de monomios.—Máximo común divisor de dos polinomios.—Máximo común divisor de varios polinomios.—Propiedades.

**Teorema de Ruffini.—Identidad de polinomios**

División por  $x-a$ .—Expresión del resto.—Criterio de divisibilidad.—Cocientes notables.—Descomposición factorial de un polinomio de una variable.—Teorema.—Polinomios de una variable idénticamente nulos.—Principio de identidad de polinomios de una variable.—Uniformidad de las operaciones aritméticas entre expresiones enteras de una variable.—Principio de identidad de expresiones de varias variables.

**Fraciones algebraicas**

Equivalencia de expresiones fraccionarias.—Teorema.—Simplificación y reducción a denominador común.—Verdadero valor de fracciones de una variable.—Forma típica de las expresiones racionales.—Expresiones irracionales: racionalización de denominadores.

**ECUACIONES****Transformación de las ecuaciones**

Definiciones.—Transformaciones por suma.—Transformaciones por multiplicación.—Forma típica de las ecuaciones algebraicas. Aplicaciones del Algebra a la resolución de problemas.—Fórmulas.

**Ecuaciones de primero y segundo grado.—Ecuaciones binomias**

Resolución de la ecuación de primer grado.—Resolución de la ecuación de segundo grado.—Discusión de las raíces.—Suma y producto de las raíces.—Signo de las raíces.—Estudio del trinomio de segundo grado.—Máximos y mínimos.—Ecuaciones binomias

**Ecuaciones reducibles a cuadráticas**

Transformación de radicales dobles en simples.—Ecuación bicuadrada.—Discusión de las raíces de la ecuación bicuadrada. Ecuaciones recíprocas de cuarto grado.—Ecuaciones trinomias.

**Elementos de la teoría de ecuaciones**

Raíces múltiples.—Raíces imaginarias.—Ecuaciones equivalentes.—Raíces comunes a dos ecuaciones.—Teorema fundamental del Algebra.—Primeras relaciones entre los coeficientes y las raíces.—Reducción del grado de una ecuación.—Raíces enteras de una ecuación.—Raíces fraccionarias de una ecuación.—Ecuaciones recíprocas de grado par.—Ecuaciones recíprocas de grado impar.

**Ecuaciones irracionales y exponenciales**

Ecuaciones irracionales.—Ecuaciones exponenciales.

**Inecuaciones con una incógnita**

Generalidades.—Inecuaciones enteras.—Inecuaciones fraccionarias.

**DETERMINANTES****Definiciones y primeras propiedades**

Matrices: definiciones.—Determinante de una matriz cuadrada.—Determinantes de segundo y tercer orden.—Primeras propiedades de los determinantes.

**Desarrollo de los determinantes**

Menor complementario y adjunto de un elemento.—Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea.—Otras propiedades de los determinantes.—Desarrollo por una fila y una columna.—Menor complementario y adjunto de un menor dado.—Desarrollo de un determinante por menos complementarios.

**Operaciones con determinantes**

Suma y productos de determinantes.

**Determinantes especiales**

Determinante adjunto.—Determinante recíproco.—Determinante de Vandermonde.

**MATRICES****Característica de las matrices**

Introducción.—Teorema fundamental.—Modo de averiguar si una línea es combinación lineal de otras.—Cálculo de la característica.

**SISTEMA DE ECUACIONES****Generalidades**

Definiciones.—Transformación de los sistemas.—Eliminación de incógnitas.—Condiciones de compatibilidad.

**Sistemas lineales**

Métodos elementales de eliminación de una incógnita entre dos ecuaciones lineales.—Resolución de los sistemas lineales por

los métodos de reducción, sustitución e igualación.—Método de Cramer.—Teorema de Rouché-Frobenius.—Interpretación gráfica.—Sistemas homogéneos.—Resolución de los sistemas homogéneos de  $n-1$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

**Sistemas no lineales**

Sistemas constituidos por una ecuación lineal y otra cuadrática.—Interpretación geométrica.—Resultante de dos ecuaciones cuadráticas.—Sistema constituido por dos ecuaciones cuadráticas.—Sistemas constituidos por ecuaciones de grado superior al segundo.—Método de los coeficientes indeterminados.

**Sistema de inecuaciones**

Sistemas con una incógnita.—Sistemas con dos incógnitas.

**ANÁLISIS INDETERMINADO****Ecuaciones diofánticas lineales**

Introducción.—Condición necesaria.—Ecuación  $ax+by=c$ .—Ecuación  $ax+by=c$ .—Resolución práctica de la ecuación diofántica con dos incógnitas.

**LÍMITES DE SUCESIONES DE NÚMEROS REALES****Definiciones y propiedades**

Definición de límite finito.—Definición de límite infinito.—Clasificación de las sucesiones.—Propiedades de las sucesiones de números reales.—Criterio general de convergencia.

**Límites de resultados operativos**

Primeras propiedades de los infinitésimos.—Límite de la suma o de la diferencia.—Límite del producto.—Límite del cociente.—Límite de logaritmos.—Límite de exponenciales.—Límite de potenciales-exponenciales.—Operación de paso al límite.—Formas indeterminadas.—Igualdades simbólicas.

**Sucesiones en forma indeterminada**

Límite de expresiones racionales e irracionales.—Número  $e$ .

**El principio de sustitución**

Sucesiones asintóticamente equivalentes.—Infinitésimos equivalentes.—Infinitos equivalentes.—Principio de sustitución.—Límites de las formas uno elevado al infinito, infinito elevado a cero y cero elevado a cero.—Criterio de Stolz-Cesaro.—Límite de la media aritmética.—Límite de la media geométrica.—Comparación de infinitésimos.—Comparación de infinitos.—Infinitésimo e infinito principal.—Ordenes.—Forma normal y parte principal. Ordenes fundamentales de infinitud.

**PROGRESIONES****Progresiones aritméticas ordinarias**

Definición.—Propiedades de las progresiones aritméticas.—Interpolación diferencial o aritmética.

**PROGRESIONES ARITMÉTICAS DE ORDEN SUPERIOR**

Definición.—Diferencias finitas.—Expresión de  $yn$ .—Diferencias finitas de los términos de una progresión.—Suma de los términos.

**Progresiones geométricas**

Definición.—Propiedades de las progresiones geométricas.—Interpolación proporcional o geométrica.

**Otras progresiones**

Progresiones aritmético-geométricas: definición y suma de términos.—Progresiones hipergeométricas: definición y suma de términos.—Progresiones armónicas.

**SERIES NUMÉRICAS****Propiedades generales**

Definiciones.—Ley de formación de los términos.—Condición necesaria para la convergencia.—Propiedades asociativa y distributiva.—Criterio general de convergencia.

**Serie de términos positivos**

Propiedades fundamentales.—Comparación directa de dos series de términos positivos.—Series armónicas.—Comparación por razones.—Criterio de la razón.—Criterio de la raíz.—Criterio de Raabe.

**Serie de términos positivos y negativos**

Generalidades.—Teorema de Riemann.—Teorema de Dirichlet.

**Tipos elementales de series sumables**

Serie geométrica.—Aplicación a las fracciones decimales periódicas.—Serie aritmético-geométrica.—Serie hipergeométrica.

*Series alternadas*

Definiciones.—Propiedades de las sumas parciales.—Convergencia y suma.

*Operaciones con series*

Adición de series convergentes.—Adición de series absolutamente convergentes.—Multiplicación de series absolutamente convergentes.

## FRACCIONES CONTINUAS

*Propiedades de las fracciones continuas*

Definiciones.—Ley de formación de las reducidas.—Propiedades de las reducidas.—Convergencia de las fracciones continuas ordinarias.—Aproximación de las reducidas.

*Desarrollos en fracción continua*

Método general.—Unicidad del desarrollo.—Desarrollo de los números racionales.—Desarrollo en fracción continua de números negativos.

## APLICACIONES

Aplicación a las ecuaciones diofánticas.—Expresión de la medida en fracción continua.—Aplicación a la mecánica.

## APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA PROPORCIONALIDAD

*Regla de tres y conjunta*

Definiciones.—Regla de tres simple directa.—Regla de tres simple inversa.—Regla de tres compuesta.—Tanto por cuanto.—Regla conjunta.

*Sistemas de unidades*

Sistema métrico decimal.—Unidades de tiempo.—Fundamento de los sistemas físicos.—Sistema monetario español.—Cotización o precio de cambio

*Operaciones con los números complejos*

Definiciones.—Reglas de transformación.—Adición.—Sustracción.—Multiplicación.—División.

*Prorrates y mezclas*

Repartos proporcionales.—Regla de compañía.—Regla de aligación.

*Cálculo comercial*

Tiempo, capital e interés.—Principio de la equivalencia financiera.—Tanto de interés.—Interés simple.—Interés compuesto.—Generalización.—Convenio lineal y convenio exponencial.—Cálculo del capital inicial, del capital final, del tanto y del tiempo.—Interés continuo.—Descuento.—Concepto.—Descuento racional simple.—Descuento comercial simple.—Equivalencia de capitales. Vencimientos común y medio.—Valores industriales.—Fondos públicos.—Tantos por ciento y renta nominal y efectiva.—Problemas sobre valores mobiliarios; relaciones fundamentales.

*Anualidades*

Anualidades de capitalización: definición.—Cálculo del capital de la anualidad y del tiempo.—Anualidades de amortización: definición.—Cálculo de la deuda, de la anualidad y del tiempo.

## BIBLIOGRAFÍA

«Análisis algebraico».—A. Fernández de Trocóniz y E. Belda. «Síntesis de matemática financiera».—A. Fernández de Trocóniz y E. Belda. «Elementos de análisis algebraico».—J. Rey Pastor. «Matemáticas».—Pascual F. Aceituno.

## PROGRAMA DE GEOMETRÍA

## INTRODUCCIÓN

Edificación racional de la Geometría.—Axiomática.—Los cinco grupos fundamentales de axiomas.

## ENLACE, ORDENACIÓN Y SENTIDO EN EL PLANO

*Las relaciones de incidencia*

Axiomas de existencia y enlace.—Diferentes determinaciones del plano.—Posiciones de dos rectas.

*Las relaciones de orden y separación*

Ordenación lineal.—Conceptos «preceder» y «seguir».—Conceptos «estar entre» y «separar».—Axioma de ordenación de los puntos de la recta.—Definiciones de semirecta y de segmento.—Pares de puntos separados.—Axioma de la división del plano.—Definiciones de semiplano y de ángulo.—Ángulos adyacentes y opuestos

por el vértice.—Ángulo cóncavo y llano.—El ángulo como conjunto de rayos.—Pares de rayos separados.—Definición de triángulo y de polígono convexo.—Propiedad general de las figuras convexas.—Propiedades de los polígonos convexas.—Línea quebrada o poligonal.—Teorema de Jordan.

*El sentido en el plano*

Los dos sentidos en la recta.—Concepto de recta ordenada y segmento orientado o vector.—Los dos sentidos en el haz.—Los dos sentidos del plano.—Plano orientado.—Correspondencia de sentidos en la proyección.—Los dos sentidos en una línea poligonal.—Individualización del sentido.—Conceptos «derecha» e «izquierda» de.

## CONGRUENCIA Y PARALELISMO EN EL PLANO

*Movimiento y congruencia*

Concepto de movimiento.—Axiomas de movimiento en el plano.—Concepto de grupo.—Axioma de la determinación del movimiento.—Movimientos directos e inversos.—Noción de congruencia.—Conservación de la congruencia en el movimiento.—Transporte de un segmento de un ángulo y de una figura en general.—Los dos primeros criterios de igualdad de triángulos.—Igualdad de polígonos.

*Simetrías y perpendicularidad en el plano*

La simetría central.—Propiedad de las rectas simétricas respecto de un centro.—Primera inversión del segmento.—Unicidad y construcción del punto medio.—La simetría axial.—Perpendicularidad.—Mediatriz y bisectriz.—Propiedades de la perpendicularidad.—Segunda inversión del segmento.—Inversión del ángulo.—Movimiento inverso del plano con un punto fijo.—Construcción de la bisectriz de un ángulo.—Construcción de la mediatriz de un segmento.—Construcción de perpendiculares.—Simetrías conjugadas.

*Sobre las proposiciones geométricas. Concepto de lugar geométrico*

Bisectrices de ángulos adyacentes y de opuestos por el vértice.—Propiedades del triángulo isósceles.—Triángulo equilátero.—La mediatriz como lugar geométrico.—Teoremas recíprocos y contrarios.—Teoremas contrarrecíprocos.—Demostraciones por reducción al absurdo.—Esquema lógico de las relaciones entre teoremas recíprocos, contrarios y contrarrecíprocos.—Condiciones necesarias y suficientes.—La bisectriz como lugar geométrico.—Tercer criterio de igualdad de triángulos.

*Las traslaciones y el paralelismo*

Definición de traslación.—Rectas homólogas en la traslación. Axioma del paralelismo.—Ángulos de lados paralelos.—Trayectorias en las traslaciones.—Grupo de las traslaciones del plano.—Segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas.—Perpendicularidad y paralelismo.—La paralela como lugar de puntos equidistantes.—Trazado de paralelas.—Conservación del paralelismo en el movimiento.—Faja del plano.—Paralela media.—Producto de simetrías de ejes paralelos.

*Los giros en el plano*

Ángulo de giro.—Propiedad de los puntos y rectas homólogas. Construcción del centro.—Reducción de un movimiento plano cualquiera.—Reducción de un movimiento a simetrías.—Grupo de los giros concéntricos.—Grupo del punto.—Divergencia de propiedades entre giros y traslaciones.

*La circunferencia*

Circunferencia.—Compás.—Determinación de la circunferencia.—Recta y circunferencia tangentes.—La circunferencia como envolvente.—Ángulos centrales y arcos.—Cuerdas.—Cuerda y diámetro perpendicular.—Lugar geométrico y de Tales.—Intersección de los pares de rectas homólogas de dos haces iguales en un movimiento directo.—Arco capaz.

## PRIMERAS RELACIONES MÉTRICAS EN LAS FIGURAS PLANAS

*Suma y desigualdad de segmentos y de ángulos*

Concepto de suma.—Ángulos complementarios y suplementarios.—Desigualdad de segmentos o ángulos.—Diferencia de segmentos o de ángulos.—Múltiplos y submúltiplos.—Ángulos determinados por dos rectas cortadas por una tercera.—Forma euclídea del postulado de paralelismo.—Suma de los ángulos de un triángulo.—Suma de los ángulos de un polígono convexo.—Desigualdad de lados y ángulos de un triángulo.—Cuarto criterio de igualdad de triángulos.—Igualdad de triángulos rectángulos

*Distancias en el plano*

Distancia entre dos puntos.—Líneas poligonales envolventes y envueltas.—Distancia de un punto a una recta.—Proyección de un punto y de un segmento sobre una recta.—Teorema de los triángulos incongruentes.—Distancia de un punto a una circunferencia.

*Los cuadriláteros planos*

Clasificación de los cuadriláteros.—Simetría del paralelogramo.—Rectángulo.—Simetrías del rectángulo.—Rombo.—Simetrías del rombo.—Cuadrado.—Simetrías del cuadrado.—Romboide y trapecio isósceles.—Simetría del romboide y del trapecio isósceles.—Paralela media de un trapecio y de un triángulo.—División de un segmento en partes iguales.

CONTINUIDAD Y CONSTRUCCIONES FUNDAMENTALES  
CON REGLA Y COMPAS

*Axioma de continuidad.—Fundamento teórico del uso del compás*

Construcciones posibles e imposibles sin el uso del compás.—Axioma de continuidad.—Intersección de una recta con una circunferencia.—Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.—Principio de reciprocidad.—Intersección de dos circunferencias.—Posiciones de dos circunferencias.

*Construcciones elementales*

El compás usado como transportador de segmentos y de ángulos.—Trazado de la mediatriz de un segmento AB.—Trazado de la perpendicular por un punto P a una recta r.—Trazado de la bisectriz de un ángulo.—Trazado de la paralela por un punto a una recta.—Construcción de triángulos.—Construcción de triángulos rectángulos y de triángulos isósceles.—Construcción de un triángulo dada alguna altura, mediana o bisectriz.—Construcción de cuadriláteros especiales.—Tangentes a una circunferencia que pasen por un punto.—Tangentes comunes a dos circunferencias.

*Ángulos y polígonos en la circunferencia*

Ángulos inscritos.—Ángulo semiinscritos.—Ángulo interior y ángulo exterior.—Construcción del arco capaz.—Aplicaciones del arco capaz.—Cuadrilátero inscriptible.—Cuadrilátero circunscriptible.—Polígonos regulares.—División de la circunferencia.—Construcción de polígonos regulares inscritos.—Polígonos regulares estrellados.

*Puntos y rectas notables en el triángulo*

Circunferencia circunscrita.—Circuncentro.—Ortocentro.—Circunferencia inscrita.—Incentro.—Circunferencias exinscritas.—Excentros.—Triángulo órtico.—Seis puntos notables de la circunferencia circunscrita.—Circunferencia de Feuerbach.—Baricentro del triángulo.—Recta de Euler.

*Medida de segmentos orientados, ángulos orientados y arcos*

Igualdad, desigualdad, suma y diferencia de segmentos orientados.—Igualdad, desigualdad, suma y diferencia de ángulos orientados.—Divisibilidad de segmentos y ángulos.—Abscisas de los puntos de una recta.—Medidas y unidades de longitud y amplitud en el mundo físico.—Medida de arcos.

## HOMOTECIA Y SEMEJANZA

*Proporcionalidad de segmentos*

Proyección paralela de los segmentos de una recta sobre otra. Segmentos determinados por una paralela a un lado de un triángulo.—Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados.—División de un segmento en partes proporcionales a segmentos dados.—Determinación de puntos de una recta por su razón de distancias a dos de ella.—Signo de la razón de distancias.—Cuaterna armónica.—Construcción del cuarto armónico.—Proyección central de los segmentos de una recta sobre otra paralela.

*Homotecia y semejanza*

Definición y propiedades de la homotecia.—Grupo de las homotecias con el mismo centro.—Concepto y propiedades de la semejanza.—Triángulos semejantes.—Criterios de semejanza de triángulos.—Triángulos homotéticos.—Determinación de la semejanza.—Descomposición de una semejanza en producto de una homotecia por un movimiento.—Centro de semejanza directa.—Grupo de las homotecias.—Trazado de rectas concurrentes de vértice inaccesible.

*Homotecia y semejanza de polígonos y circunferencias*

Semejanza de polígonos.—Semejanza de polígonos regulares.—Homotecias entre dos circunferencias.—Centros de homotecia de tres circunferencias.—Aplicaciones de la semejanza al dibujo

## RELACIONES MÉTRICAS DERIVADAS DE LA SEMEJANZA

*El teorema de Pitágoras*

El producto de segmentos.—Rectas antiparalelas.—Relaciones métricas en el triángulo rectángulo.—Construcción de medias proporcionales.—Teorema de Pitágoras.—Generalización del teorema de Pitágoras.—Suma y diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo.—Lugares geométricos de puntos cuya suma o cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos del plano es constante.—Cálculo geométrico con segmentos.

*Relaciones métricas en la circunferencia*

Potencia de un punto respecto de una circunferencia.—Condición para que cuatro puntos sean concíclicos.—Expresión de la potencia.—Eje radical de dos circunferencias.—Centro radical de tres circunferencias.—Sección áurea de un segmento.—Propiedad de la sección áurea.—Construcción de un segmento conocido su segmento áureo.—Construcción del segmento áureo de un segmento dado.—Construcción de medias geométricas.—Construcción de dos segmentos, conocido su producto, y su suma o diferencia.—Resolución geométrica de la ecuación de segundo grado. Ecuación de la sección áurea.—Teorema de Ptolomeo.

*Relaciones métricas en el triángulo*

Propiedad métrica de las bisectrices.—Aplicación a construcciones de cuaternas armónicas.—Lugar geométrico de puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante.—Isogonales.—Cálculo de las bisectrices en función de los lados.—Cálculo de las medianas.—Segmentos determinados en los lados por los puntos de contacto de las circunferencias inscrita y exinscrita.—Radios de las circunferencias inscrita y exinscrita.—Expresión de las alturas en función de los lados.—Radio de la circunferencia circunscrita.

## INVERSIÓN Y POLARIDAD EN EL CÍRCULO

*Haces de circunferencias*

Relación entre la mitad de un segmento y las distancias de su punto medio a dos puntos separados armónicamente por los extremos.—Circunferencias ortogonales.—Cuaternas armónicas determinadas por dos circunferencias ortogonales.—Haz de circunferencias.—Haces ortogonales.—Inversión en la recta.—Involución rectilínea.—Involución de puntos obtenida como sección de un haz

*La inversión en el plano*

Definición de la inversión.—Figuras homólogas de sí mismas en la inversión.—Propiedades de figuras inversas.—Circunferencias inversas.—Propiedades de las circunferencias inversas.—Conservación de ángulos en la inversión.—Rectas isogonales a dos circunferencias.—Circunferencias tangentes a dos.—Circunferencias isogonales a otras dos.—Aplicaciones de la inversión.

*Polaridad en la circunferencia*

Puntos conjugados respecto de una circunferencia.—Polar de un punto.—Polo de una recta.—Polaridad recíproca.—Transformación por polares recíprocas.—Involución de puntos conjugados en una recta.—Involución en el eje radical de dos circunferencias.—Rectas conjugadas.—Triángulo autopolar.

## EQUIVALENCIA Y ÁREAS

*Las áreas de los polígonos*

Resumen y crítica del cálculo elemental de áreas.—Suma de polígonos.—Teoría de las magnitudes poligonales.—Área del paralelogramo.—Área del trapecio.—Área de un polígono.—Otras expresiones del área del triángulo.—Fórmula de Herón.—Áreas de polígonos semejantes.—Cambio de unidad lineal

*Equivalencias de polígonos*

Cuadratura de polígonos.—Transformación de un polígono convexo en otro equivalente de un lado menor.—Transformación de un rectángulo en otro equivalente de base dada.—Teoría geométrica de la equivalencia.—Equivalencia geométrica de los polígonos de igual área.—Teoremas métricos deducidos por equivalencia.

## MEDIDA DE FIGURAS CIRCULARES

*Cálculo de polígonos regulares*

Razón de semejanza entre dos polígonos regulares inscrito y circunscrito de igual número de lados.—Triángulo equilátero.—Hexágono regular.—Cuadrado.—Decágono.—Pentágono.—Pentadécágono.—Apotema y radio de un polígono regular isoperímetro de otro y de doble número de lados.—Cálculo de los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos de doble número de lados.

*Longitudes y áreas de figuras circulares*

Longitud de la circunferencia.—La longitud de la circunferencia como límite.—El número  $\pi$ .—Cálculo de  $\pi$ .—Método de los perímetros.—Método de los isoperímetros.—Área del círculo.—Longitud de un arco.—Área de un sector.—El radián.—Áreas del segmento, de la corona y del sector de la corona.—El problema de la cuadratura del círculo.—Rectificación aproximada de la circunferencia.

## METODOLOGÍA DE LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

*Método general reductivo. Problemas de tangencia*

El método reductivo.—Trazado de una circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a una recta o a otra circunferencia.

cia.—Determinación de una circunferencia tangente a dos rectas y que pase por un punto, o que sea tangente a otra circunferencia.—Método del problema recíproco.

#### Método de los lugares geométricos

Método de los lugares geométricos de puntos.—Lugares geométricos rectilíneos.—Lugares geométricos circulares.—Lugares geométricos de rectas.—Problemas resueltos mediante lugares geométricos de puntos o rectas.

#### Método de las transformaciones (movimientos)

Carácter invariante de las propiedades de la geometría métrica.—Aplicación de las transformaciones a la resolución de problemas.—Transformaciones por traslación.—Transformaciones por simetría.—Transformaciones por giro.

#### Método de las transformaciones (homotecia, semejanza, inversión), Problema de Apolonio

Problemas que se resuelven mediante transformaciones por homotecia.—Problemas que se resuelven mediante transformaciones por semejanza.—Empiezo del centro de semejanza.—Problemas que se resuelven por inversión.—Recapitulación de los problemas de determinación de una circunferencia por condiciones de tangencia.

#### El uso de los instrumentos geométricos. Crítica de las construcciones. Introducción a la Geometría Analítica

Los instrumentos clásicos y su función.—Problemas resolubles con la regla y el portasegmentos.—Problemas resolubles con la regla de bordes paralelos.—Geometría del compás.—Exigencias prácticas en la técnica de las construcciones.—Introducción a los métodos de la Geometría analítica.—Coordenadas cartesianas de un punto.—Distancia entre dos puntos.—Punto medio de un segmento.—Ecuación de la recta.—Recta que pasa por dos puntos.—Punto de intersección de dos rectas.—Ecuación de la circunferencia.—Carácter algebraico de las construcciones con regla y compás.

#### Concepto de curva

Definiciones de arco de curva de Jordan y de curva cerrada de Jordan.—Sentidos en una curva de Jordan.—Concepto de tangente.—Puntos ordinarios, angulosos y de retroceso.—Concavidad, convexidad, inflexión.—Representación analítica de las curvas de Jordan.

#### ENLACE, ORDENACIÓN Y SENTIDO DEL ESPACIO

##### Incidencia y separación en el espacio

Propiedades de incidencia.—Axioma de división del espacio.—Intersección de dos planos.—Concepto de diedro.—Triedro.—Angulo poliedro o anguloide.—Propiedad general de las figuras convexas.—Superficie poliédrica.—Poliedro convexo.—Propiedades de los poliedros convexos.—Superficies poliédricas y poliedros no convexos.—Teorema de Euler.

##### El sentido en el espacio

Los dos sentidos en un haz de semiplanos.—Individualización de los sentidos.—Los dos sentidos en la radiación.—Los dos sentidos en un ángulo poliedro.—Sentidos de triedros y anguloideos opuestos por el vértice.—Los dos sentidos en el espacio.—Los dos sentidos en una superficie poliédrica convexa.

#### LOS MOVIMIENTOS Y LA CONGRUENCIA EN EL ESPACIO

##### Movimiento, congruencia y perpendicularidad

Concepto de movimiento.—Axiomas del movimiento.—Congruencia en el espacio.—Lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos.—Plano perpendicular a una recta.—Perpendicularidad entre rectas cruzadas.—Recta perpendicular a un plano.—Sección recta de un diedro.—Planos perpendiculares.

##### Las simetrías en el espacio

La simetría axial.—La simetría central.—Simetría respecto de un plano o simetría especular.—Comparación entre las simetrías central y especular.—Pseudomovimiento y pseudoigualdad.—Simetrías asociadas a un triedro trirectángulo.—Semiplano bisector de un diedro.

##### Traslación y paralelismo en el espacio

Definición y propiedades de la traslación.—Paralelismo de planos y de recta y plano.—Perpendicularidad y paralelismo.—Equidistancia de dos planos paralelos.—Ángulos de lados paralelos.—Zona de espacio.—Producto de simetrías especulares respecto de planos paralelos.—Producto de simetrías centrales.—Superficies y espacios prismáticos y cilíndricos.

##### Proyecciones, distancias y ángulos en el espacio

Proyección paralela sobre un plano.—Paralelismo y perpendicularidad entre proyecciones.—Distancia de un punto a un

plano.—Distancia entre dos planos paralelos.—Distancia entre una recta y un plano paralelo.—Distancia entre dos rectas que se cruzan.—Ángulo de recta y plano.—Ángulo de dos rectas cruzadas.—Invariancia de las distancias y ángulos en el movimiento.—Lugar geométrico de los puntos de un plano, equidistantes de un punto exterior.

#### Giros en el espacio

Concepto de giro.—Propiedades.—Construcción del eje.—Ángulo de giro.—Grupo de los giros con un mismo eje.—Trayectorias.—Superficies de revolución.—Movimiento con un punto fijo. Producto de una traslación por un giro de eje perpendicular a la dirección de traslación.—Movimiento helicoidal.—Reducción de un movimiento cualquiera a un movimiento helicoidal.—Producto de simetrías respecto de planos secantes.—Reducción de un movimiento a producto de simetrías especulares.—Reducción de un movimiento a producto de simetrías axiales.

#### PROPIEDADES MÉTRICAS DE LOS ANGULOIDES Y POLIEDROS

##### Los ángulos poliedros

Medida de diedros.—Ángulo plano y diedro suplementario.—Anguloideos polares.—Propiedades métricas de las caras y diedros de un triedro.—Propiedades métricas de las caras y triedros de un anguloide.—Triedro isósceles.—Igualdad de triedros.—Criterios de igualdad de triedros.

##### Propiedades métricas de los poliedros, primas y pirámides

Suma de los ángulos de las caras de un poliedro convexo.—El prisma.—El paralelepípedo.—El ortoedro.—Teorema de Pitágoras en el ortoedro.—El cubo.—La pirámide.—Tronco de pirámide.—Secciones paralelas de un anguloide.—Igualdad de poliedros y tetraedros.

##### Los poliedros regulares convexos

Poliedros regulares.—Existencia de los cinco poliedros regulares.—Poliedros regulares conjugados.—Centro de un poliedro regular.

#### LOS CUERPOS REDONDOS

##### Cilindro, cono y esfera

El cilindro circular.—Planos secantes y tangentes al cilindro. El cono circular.—Llanos tangentes al cono.—El tronco de cono. Secciones antiparalelas del cono circular oblicuo.—La esfera.—Posiciones relativas de una esfera y una recta.—Posiciones relativas de una esfera y un plano.—Posiciones de dos esferas.—Cono y cilindro circunscrito a una esfera.—Determinación de la superficie esférica.—Lugar geométrico de los centros de las secciones antiparalelas del cono circular.

##### La Geometría en la superficie esférica

Distancia esférica.—Ángulo esférico.—Perpendicularidad.—Triángulos esféricos.—Propiedades de los triángulos esféricos.—Polígonos esféricos.—Triángulos y polígonos polares.—Igualdad de triángulos esféricos.—Comparación entre las geometrías en la superficie esférica y en el plano.—Mediatriz y bisectriz esféricas.—Circunferencias menores.—Construcciones en la superficie esférica.

#### HOMOTECIA, INVERSIÓN Y POLARIDAD EN EL ESPACIO

##### Homotecia y semejanza en el espacio

Rectas cortadas por planos paralelos.—La homotecia en el espacio.—Triángulos homotéticos en el espacio.—Semejanza en el espacio.—Semejanza de tetraedros y poliedros.—Condiciones suficientes de semejanza.—Grupo de las homotecias.—Esferas homotéticas.

##### Potencia respecto de la esfera

Potencia de un punto respecto de una esfera.—Plano radical de dos esferas.—Eje radical de tres esferas.—Centro radical de cuatro esferas.—Haz de esferas.—Superficies esféricas ortogonales.—Circunferencias coesféricas.

##### La inversión y la proyección estereográfica

Definición de la inversión.—Elementos homólogos de sí mismos.—Figuras inversas.—Conservación de ángulos.—La proyección estereográfica.—Construcciones en proyección estereográfica.

##### Polaridad respecto de la esfera

Puntos conjugados respecto de la esfera.—Plano polar de un punto.—Polaridad recíproca.—Rectas polares.—Polaridad respecto de una esfera.—Tetraedro autopolar.

#### LAS ÁREAS EN EL ESPACIO

##### Cálculo de áreas

Áreas de las superficies poliédricas.—Área de la superficie del cilindro recto circular.—Área lateral del cilindro truncado.—Área de la superficie del cono circular recto.—Área de la su-

perímetro del tronco de cono circular.—Otra expresión de las áreas laterales del cono, tronco de cono y cilindro.—Área de la superficie engendrada por la rotación de una línea poligonal regular alrededor de un eje no secante que pasa por su centro. Área del casquete, de la zona y de la esfera.—Áreas de superficies semejantes.

#### Áreas de polígonos esféricos. Noción de ángulo sólido

Área de un huso.—Área de un triángulo esférico.—Área de un polígono esférico.—Noción de ángulo sólido.—Suma de los ángulos sólidos de un poliedro.

#### LOS VOLÚMENES

##### Los volúmenes de los poliedros

Resumen y crítica del cálculo elemental de volúmenes de poliedros.—Suma de poliedros.—Teoría de las magnitudes polihédricas.—Cambio de unidad.

##### Equivalencia de poliedros y cálculos de sus volúmenes

Tetraedros equivalentes.—Volumen de la pirámide.—Volumen del prisma y del tronco de prisma triangular.—Volumen de un prisma cualquiera.—Volumen del paralelepípedo y del ortoedro.—Volumen del prismatoide.—Aplicación al cálculo de volúmenes de desmontes, zanjas, etc.—Volumen del tronco de pirámide.—Razón de los volúmenes de dos poliedros semejantes

##### Volumen de cuerpos redondos

Volumen de un cilindro.—Volumen del cilindro recto truncado.—Volumen del cono.—Volumen del tronco del cono circular.—Volumen de cuerpos circunscriptibles a una esfera.—Volumen de sectores cilíndricos, cónicos y troncocónicos.—Volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un sector poligonal regular. Volumen del sector esférico y de la esfera.—Volumen de la cuña esférica.—Volumen de pirámides esféricas.—Volumen del segmento esférico de una base.—Volumen del segmento esférico de dos bases.—Volumenes de cuerpos semejantes.

#### ESTUDIO MÉTRICO DE LAS CÓNICAS

##### Definiciones métricas de las cónicas

Definición y clasificación de las cónicas.—Focos, directrices, eje focal.—Razón de distancias de un punto de la cónica a un foco y a su directriz.—Nueva definición métrica de las cónicas.—Teorema de Dandelin.—Tercera definición del elipse e hipérbola. Secciones del cilindro de revolución.—Eje menor de la elipse.—Lugares geométricos de los vértices de los conos de revolución que pasan por una cónica dada.—La excentricidad en función del eje focal y de la distancia focal.—Cónicas degeneradas.

##### Trazado de las cónicas. Puntos comunes con una recta

Trazado de las cónicas. Ejes de simetría.—Las circunferencias focales en la elipse e hipérbola.—Intersecciones de una cónica con una recta.—Propiedades de las tangentes.—Secantes excepcionales y asíntotas de la hipérbola.—Eje transversal de la hipérbola.—Hipérbola equilátera.—Las tangentes y asíntotas como secciones de planos tangentes al cono.

##### Trazado de tangentes. Propiedades métricas

Trazado de tangentes por un punto.—Teoremas de Poncelet.—Tangentes en los extremos de una cuerda focal.—Círculo de Monge.—Tangentes paralelas a una dirección.—Propiedad de la circunferencia principal de una elipse o una hipérbola y de la tangente en el vértice de una parábola.—Aplicación al trazado de tangentes.—Normal a una cónica en un punto.—Subtangente y subnormal en la parábola

##### Iniciación al estudio analítico de las cónicas

Expresión de los radios vectores.—Ecuación focal de las cónicas.—Ecuación cartesiana de la elipse e hipérbola.—Ecuación cartesiana de la parábola.—La elipse como proyección de la circunferencia.—Área de la elipse.—Nuevas construcciones de la elipse.—Distancias de un punto de una hipérbola, a sus asíntotas.—Ecuación de la hipérbola referida a las asíntotas.

#### BIBLIOGRAFÍA

«Curso de Geometría Métrica». P. Puig Adam (tomo primero y segundo).

#### PROGRAMA DE TRIGONOMETRIA

##### LOS PROBLEMAS CLÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

##### Las funciones circulares de ángulos agudos

Origen y objeto de la Trigonometría.—Las funciones goniométricas de un ángulo agudo.—Relaciones entre las funciones goniométricas de un mismo ángulo.—Funciones de ángulos complementarios.—Las razones goniométricas interpretadas como

funciones circulares.—Valores particulares notables.—Senos y tangentes de ángulos pequeños.—Disposición y uso de las tablas. Interpolación lineal.—Logaritmos de senos y tangentes de ángulos pequeños.—Lectura inversa.

##### Resolución de triángulos rectángulos. Aplicaciones

Resolución de triángulos rectángulos.—Noción de pendiente. Resolución de triángulos isósceles.—Resolución de rectángulos, rombos y trapecios.—Resolución trigonométrica de polígonos regulares.—Proyección ortogonal de un segmento y de un área plana sobre un plano.—Aplicación al cálculo de superficies de igual pendiente.

##### Resolución de triángulos oblicuángulos. Teoremas de los senos y del coseno

Funciones circulares de ángulos obtusos.—Funciones de ángulos suplementarios.—Determinación de un ángulo convexo por su seno.—Ángulos que difieren en  $90^\circ$ .—Expresión trigonométrica de las alturas de un triángulo oblicuángulo.—Teorema de los senos.—Casos de resolución de triángulos en los que se aplica el teorema de los senos.—Radio del círculo circunscrito.—Teorema del coseno.—Casos de resolución en los que puede aplicarse el teorema del coseno

##### Resolución de triángulos oblicuángulos. Teoremas de las tangentes y las fórmulas de Briggs

Analogías de Mollweide y de Neper.—Teorema de las tangentes.—Aplicación a la resolución de un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.—Relación entre los lados, los ángulos y el radio del círculo inscrito.—Fórmulas de Briggs.—Aplicación a la resolución de un triángulo, dados los tres lados. Cálculo trigonométrico del área de un triángulo.—Área de un segmento regular.—Cálculo de medianas y bisectrices.—Resolución de triángulos con otros datos.—Aplicaciones de la Trigonometría a la Topografía.

#### PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES

##### Funciones circulares de ángulos cualesquiera

Las funciones circulares de ángulos cualesquiera.—Coordenadas polares.—Determinación de funciones circulares de ángulos negativos, de ángulos concavos y de ángulos mayores que  $2\pi$ .—Relación entre las funciones trigonométricas de los ángulos que difieren en  $\pi/2$ .—Gráficas cartesianas de las funciones circulares.—Noción de función periódica.—Arcos y ángulos que corresponden a una misma función circular.

##### Las fórmulas de adición de argumentos

Igualdad y suma de vectores.—Proyección de un vector sobre un eje.—Teoremas sobre proyecciones.—Fórmulas de adición de argumentos.—Funciones circulares del ángulo duplo.—Funciones circulares del ángulo mitad.—Expresiones de  $\sin 2x$ ,  $\cos 2x$  en función de  $\sin x$ ,  $\cos x$ .—Transformación de sumas de funciones circulares en productos.—Coordenadas topográficas.—Itinerarios. Cálculo trigonométrico de la resultante de un sistema de vectores.

##### Nuevas aplicaciones geométricas de las funciones circulares

Relaciones entre las funciones circulares de tres ángulos que suman  $180^\circ$ .—Conexión analítica entre los grupos de fórmulas usados en la resolución de triángulos.—Las fórmulas para la resolución de triángulos obtenidas como consecuencia del teorema de las proyecciones.—Resolución de cuadriláteros.—Solución trigonométrica del problema de la carta.—Cuadrilátero inscripible.

##### Aplicaciones de los números complejos a las funciones circulares

Expresión de las funciones circulares de los múltiplos de un ángulo.—Desarrollo de  $\sin nx$ ,  $\cos nx$  en función de los senos y cosenos de múltiplos de  $x$ .—Desarrollos en serie de  $\sin x$  y  $\cos x$ .

##### Las funciones circulares y las ecuaciones algebraicas

Ecuaciones trigonométricas.—Resolución algebraica de ecuaciones trigonométricas reductibles.—Ecuaciones lineales a  $\sin x$  y  $\cos x$ .—Transformación de expresiones binomias en monomias.—Resolución trigonométrica de la ecuación binomia y de la ecuación cuadrática.

#### LOS PROBLEMAS CLÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

##### Conceptos y fórmulas fundamentales

Triédros y triángulos esféricos.—Triángulos polares.—Fórmulas de Bessel. Teorema del coseno.—Fórmula de la altura esférica. Teorema de los senos.—Relaciones entre lados y ángulos opuestos.—Relaciones entre tres ángulos y un lado.—Fórmulas para la resolución de triángulos rectángulos.—Fórmulas para los triángulos rectiláteros.

*Resolución de triángulos esféricos*

Resolución de triángulos rectángulos.—Resolución de triángulos isósceles.—Casos de resolución de triángulos oblicuángulos.—Resolución de un triángulo dados los tres lados.—Resolución de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.—Analogías de Gauss-Delambre y de Neper.—Resolución dados dos lados y un ángulo opuesto.—Cálculo del área. Fórmula de L'Huilier.—Fórmulas que dan los lados en función de los tres ángulos.

*Aplicaciones de la Trigonometría esférica*

Seno de un triedro.—Volumen de un tetraedro y de un paralelepípedo en función de tres aristas concurrentes y del seno del triedro que forman.—Cálculo de diedros y ángulos sólidos.—Aplicación a poliedros.—Mínima distancia geográfica entre dos puntos.—Ángulos que determinan la posición de las estrellas en la esfera celeste.—Posición de un astro respecto del observador.—Triángulo astronómico o de posición.—La Trigonometría plana como primera aproximación de la esférica.—Teorema de Legendre.

## BIBLIOGRAFÍA

«Curso de Geometría métrica».—P. Puig Adam (tomo segundo).

«Tablas de Logaritmos».—Francisco Graña.

## ADMINISTRACION LOCAL

*RESOLUCION de la Diputación Provincial de Vizcaya por la que se anuncia concurso de méritos para la provisión de una plaza de Ayudante del Servicio de Caminos de esta Corporación.*

Se anuncia concurso de méritos para la provisión de una plaza de Ayudante del Servicio de Caminos de esta Corporación, dotada con el sueldo de 33.000 pesetas, entre españoles

varones que posean el título de Ayudantes de Obras Públicas y se hallen comprendidos en la edad de dieciocho a treinta y cinco años.

Los solicitantes deberán presentar en el registro general de esta Corporación, de conformidad con lo dispuesto en el Decreto de 10 de mayo de 1957, y juntamente con su instancia, donde se detalle la edad y demás requisitos de capacidad, certificado del título oficial de Ayudante de Obras Públicas y demás documentos justificativos de que reúnen las condiciones exigidas en la convocatoria, así como trabajo, publicaciones, etc.

De acuerdo con lo establecido en el artículo 14 del mencionado Decreto de mayo de 1957, el concursante que sea propuesto por el Tribunal para el desempeño de la plaza deberá aportar ante la excelentísima Diputación y dentro del plazo de treinta días a partir de la propuesta de nombramiento la partida de nacimiento, certificado de buena conducta expedido por la Alcaldía de su domicilio, certificado de carecer de antecedentes penales y certificado de adhesión al Movimiento Nacional expedido por la Jefatura Provincial de Falange Española Tradicionalista y de las JONS.

El Tribunal que ha de calificar los méritos se constituirá en la forma siguiente: Presidente, el de la Diputación o un miembro electivo de ésta; vocales: Ingeniero Director de Obras y Vías Provinciales, un representante de la Dirección General de Administración Local, un representante técnico del excelentísimo señor Gobernador civil de la provincia, un representante de la Dirección General de Carreteras y Caminos Vecinales, un representante de la Asociación de Ayudantes de Caminos y el Jefe de la Sección de Obras Públicas; Secretario, el de la Corporación o funcionario en quien delegue.

Las instancias con su documentación, debidamente reintegradas y dirigidas al excelentísimo señor Presidente de la Diputación, se presentarán durante el plazo de treinta días hábiles a contar del siguiente al de la inserción del presente anuncio en el «Boletín Oficial del Estado» y hasta las doce horas del último día.

Los aspirantes al cargo sufrirán un reconocimiento facultativo que acredite su aptitud física para desempeñarlo.

Bilbao, 12 de julio de 1963.—El Presidente.—5.113.

## III. Otras disposiciones

## MINISTERIO DE JUSTICIA

*ORDEN de 17 de mayo de 1963 por la que se concede la libertad condicional a siete penados.*

Ilmo. Sr.: Vistas las propuestas formuladas para la aplicación del beneficio de libertad condicional establecido en los artículos 98 al 100 del vigente Código Penal y Reglamento de los Servicios de Prisiones aprobado por Decreto de 2 de febrero de 1956, a propuesta del Patronato Central de Nuestra Señora de la Merced para la redención de las penas por el trabajo y previo acuerdo del Consejo de Ministros en su reunión de esta fecha,

Su Excelencia el Jefe del Estado, que Dios guarde, ha tenido a bien conceder el beneficio de libertad condicional a los siguientes penados:

De la Colonia Penitenciaria de El Dueso, Santoña (Santander): Bautista Vigil Fernández, Juan Jáuregui Arregui.

De la Prisión Central de Puerto de Santa María (Cádiz): Antonio Mateo Pérez.

De la Prisión Celular de Barcelona: Alejandro Fernández Piazuolo Queixalós.

De la Prisión Provincial de Bilbao: Antonio Marquijano Capillas.

De la Prisión Provincial de Cáceres: Victor Martínez Culebradas.

De la Prisión Provincial de Santander: Francisco Alonso Azcona.

Lo digo a V. I. para su conocimiento y efectos consiguientes. Dios guarde a V. I. muchos años. Madrid, 17 de mayo de 1963.

ITURMENDI

Ilmo. Sr. Director general de Prisiones.

*RESOLUCION de la Subsecretaria por la que se hace publico haber sido solicitada por don Manuel de Foronda y Gómez la sucesion por distribucion en el titulo de Conde de Torre Nueva de Foronda.*

Don Manuel de Foronda y Gómez ha solicitado la sucesión en el título de Conde de Torre Nueva de Foronda, vacante por fallecimiento de su padre, don Mariano de Foronda y González-Bravo, que verificó distribución al amparo del artículo 13 del Real Decreto de 27 de mayo de 1912.

Lo que se anuncia a los efectos del artículo sexto del mismo Real Decreto, por el plazo de treinta días, para que puedan solicitar lo conveniente los que se consideren con derecho al referido título.

Madrid, 5 de julio de 1963.—El Subsecretario, R. Oreja.

*RESOLUCION de la Subsecretaria por la que se hace publico haber sido solicitada por doña Maria del Carmen Morenés y Garcia-Sancho la sucesion en el titulo de Marques de Montealegre, con Grandeza de España.*

Doña María del Carmen Morenés y García-Sancho ha solicitado la sucesión en el título de Marqués de Montealegre, con Grandeza de España, vacante por fallecimiento de su hermano don Juan Antonio Morenés y García-Sancho.

Lo que se anuncia por el plazo de treinta días, a los efectos del artículo sexto del Real Decreto de 27 de mayo de 1912, para que puedan solicitar lo conveniente los que se consideren con derecho al referido título.

Madrid, 5 de julio de 1963.—El Subsecretario, R. Oreja.

*RESOLUCION de la Subsecretaria por la que se convoca a don Jose Gomez Moya y a doña Vicenta Perez-Aloe y Garcia de Guadiana en el expediente de rehabilitacion del titulo de Conde de la Cadena.*

Don José Gómez Moya y doña Vicenta Pérez-Aloe y García de Guadiana han solicitado la rehabilitación del título de Conde de la Cadena.