DIRECCIÓN-ADMINISTRACIÓN:
Calle del Carmen, núm. 29, principal.
Teléfono núm. 2.549.

VENTA DE EJEMPLARES:
Ministerio de la Gobernación, planta baja.
Número suelto, 0,50.

GACETA DE MADRID

—SUMARIO—

Parte oficial.

Presidencia del Consejo de Ministros:

Real decreto decidiendo á favor de la Autoridad judicial la competencia suscitada entre el Gobernador civil de Gerona y el Juez de primera instancia de Figueras.

Ministerio de Hacienda:

Real decreto disponiendo cese en el cargo de Ordenador de pagos del Ministerio de Marina D. Ricardo Iglesias y López, y se encargue del desempeño del mismo destino D. Miguel Fontenla y do Pico, Ordenador de Marina de primera clase é Interventor de la misma Ordenación.

Otro exceptuando de las formalidades de subasta la adquisición de papel blanco continuo, arpilleras para su enfarde y demás gastos que ocasione la elaboración de los recibos de la Contribución territorial, correspondientes á los trimestres 2.°, 3.° y 4.° del actual ejercicio.

Ministerio de la Guerra:

Real orden concediendo al Capitán de Ingenieros D. Eduardo Gallego Ramos la cruz de primera clase del Mérito Militar blanca, pensionada.

Otras disponiendo se devuelvan á los interesados las 1.500 pesetas que depositaron para redimirse del servicio militar activo.

Otra circular disponiendo que el día 15 de Julio próximo den principio los exámenes de ingreso en las Academias militares de Infantería, Caballería, Artillería, Ingenieros y Administración Militar.

Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes:

Real orden declarando desierto el concurso de traslación anunciado para proveer la Cátedra de Enfermedades de la infancia, vacante en la Universidad de Santiago.

Otra ídem íd. el ídem de ascenso entre Auxiliares para proveer la plaza de Profesora numeraria de la Sección de Letras de la Escuela Normal de Maestras de Cuenca.

Otra nombrando, en virtud de concurso de traslación, á D. Francisco Javier González Sarrió, Catedrático de Reconocimiento de Productos comerciales y Prácticas de laboratorio de la Escuela Superior de Comercio de Valladolid.

Otra ídem íd. íd. á D. Francisco Jaén del Pino, Catedrático de Teneduría de libros y Contabilidad de Empresas de la Escuela Superior de Comercio de Sevilla.

Otra declarando no ha lugar á la adjudicación de la Cátedra de Mineralogía y Botánica con su acumulada de Zoología general, vacante en la Sección de Ciencias sostenida por el Ayuntamiento de Cádiz.

Otra nombrando á D. Joaquín Isorna y Soto, Catedrático numerario de Terapéutica de la Facultad de Medicina de Cádiz.

Otra reconociendo á los Auxiliares numerarios de las Universidades de Sevilla, Valencia y Zaragoza, que se mencionan, el derecho á obtener por concurso Cátedras de número de la Facultad de Filosofía y Letras.

Ministerio de Fomento:

Real orden determinando la obligación en que se encuentran todas las Sociedades sometidas al régimen de la Ley de 14 de Mayo de 1908, de reintegrar con el oportuno timbre las comunicaciones y escritos oficiales que se dirijan á la Comisaría y Junta consultiva de Seguros.

Administración Central:

HACIENDA.—**Junta clasificadora de las Obligaciones procedentes de Ultramar.** *Anulando el resguardo nominativo, número 49.061, expedido á favor de D. Miguel Casanovas Amorós.*

Dirección General de la Deuda y Clases Pasivas. — *Señalamiento de pagos.*

FOMENTO.—**Dirección General de Obras Públicas.— Carreteras.** — *Aprobando el presupuesto para el acopio de piedra machacada para la reparación de los kilómetros 13 al 26 de la carretera de Madrid á Cádiz, provincia de Madrid.*

ANEXO 1.°—BOLSA.—OBSERVATORIO CENTRAL METEOROLÓGICO.—OBSERVATORIO DE MADRID.—SUBASTAS.—ADMINISTRACIÓN PROVINCIAL.—ANUNCIOS OFICIALES *del Banco de España (Burgos), Compañía de los Ferrocarriles de La Carolina y Prolongaciones, Crédito Navarro, Comisión provincial de Cuenca, Compañía anónima Parsons, Sociedad Salinas de Minglanilla, Sociedad de Electricidad de Chamberí, Sociedad La California Manchega, Sociedad La Regeneradora, Compañía Ibérica de redes telefónicas, y Banco de España (Madrid).*—SANTORAL.

ANEXO 2.°—EDICTOS.—CUADROS ESTADÍSTICOS DE

HACIENDA.—**Junta clasificadora de las Obligaciones procedentes de Ultramar.** *Rectificaciones de relaciones de créditos publicadas con anterioridad.*

ANEXO 3.°—TRIBUNAL SUPREMO.—SALA DE LO CONTENCIOSO-ADMINISTRATIVO. *Pliego 30.*

PARTE OFICIAL

PRESIDENCIA DEL CONSEJO DE MINISTROS

S. M. el REY Don Alfonso XIII (q. D. g.), S. M. la REINA D.ª Victoria Eugenia, y SS. AA. RR. el Príncipe de Asturias é Infantes D. Jaime y D.ª Beatriz, continúan sin novedad en su importante salud.

De igual beneficio disfrutan las demás personas de la Augusta Real Familia.

REAL DECRETO

En el expediente y autos de competencia promovida entre el Gobernador civil de Gerona y el Juez de primera instancia de Figueras, de los cuales resulta:

Que en 27 de Diciembre de 1909, don Ramón Margineda y Benavent promovió ante el Juzgado de Figueras interdicto de retener la posesión contra la razón social Martí, Badosa y Compañía, fundándose en que poseía quieta y pacíficamente varias fincas, sitas en el pueblo de Villajuiga, en las que había enclavado un manantial de este nombre que discurre subterráneamente de Norte á Sur, y que fué alumbrado en 1902 por el demandante, á quien fué concedida autorización administrativa para explotarlo como aguas minero-medicinales con fines terapéuticos, por Real orden de 15 de Julio de 1904:

Que la razón social Martí, Badosa y Compañía posee, lindante con las fincas y manantial expresados, y al Sur del terreno en que existen los pozos, obras y efectos industriales de explotación de este manantial, un campo, hoy cerrado de pared, conocido con la denominación de Huerta Martí, en el cual existían desde algún tiempo dos pozos ordinarios para usos domésticos, estando toda esta finca unida en su longitud al terreno en que existe el manantial Villajuiga, y sin más separación que una simple pared, y de la cual dista el referido manantial unos

20 metros, de modo que desde el pozo por el que se explota dicho manantial al límite Sur de la Huerta Martí, hay una distancia máxima de 56 metros en la parte más corta, y 70 metros por la parte más larga, ó sea, que cualquier punto que se tome de la superficie de la Huerta Martí, dista del manantial que explota el demandante 70 metros ó menos;

Que en el mes de Mayo de 1909, comenzó D. José Manera, auxiliado de varios operarios, y por orden y cuenta de la razón social Martí, Badosa y Compañía, á realizar obras de apertura de nuevos pozos, modificar otros y, por fin, abrir de Centro á Levante de dicha Huerta, una profunda excavación circular que mide unos 14 metros de diámetro aproximadamente, y más de 10 de profundidad, con el fin de captar aguas minerales para explotarlas con fines terapéuticos en el servicio de un Balneario público y como todos estos actos constituyen un intento de perturbación, tendiendo marcadamente al despojo del derecho que tiene el demandante de que nadie construya pozos, socave terrenos, ni abra galerías para alumbrar manantiales con fines que no sean para usos domésticos, y aun esto con pozos comunes solamente, promovía el interdicto para impedir que se quebrantase su derecho y se le perturbase en la cuasi posesión que de él está;

Que admitida la información prevenida por la Ley, se convocó á las partes á la oportuna comparecencia, y estándose celebrando ésta, el Gobernador civil de Gerona, de acuerdo con la mayoría de la Comisión provincial, requirió de inhibición al Juzgado, fundándose:

En que con arreglo á lo dispuesto en los artículos 18, 19, 20, 23 y 248 de la ley de Aguas, y en la Real orden de 31 de Marzo de 1876, las cuestiones de la naturaleza de la que nos ocupa, son de competencia exclusiva de la Administración, y, por tanto, á ésta, y no á los Tribunales ordinarios, debía haber acudido el demandante para dejar á salvo los derechos que entienda perturbados con la apertura del pozo que para el alumbramiento de sus aguas subterráneas minero-medicinales está practicando la Sociedad demandada;

Que, á mayor abundamiento, el precitado artículo 23 de la ley de Aguas, declara, en forma expresa y contundente, la competencia de la Administración en el presente caso, al disponer que el Alcalde, de oficio ó á instancia de parte, podrá suspender las labores del pozo artesiano, socavón ó galería, cuando, mediante ellos, se distraigan ó mermen aguas públicas ó privadas;

Que así debió comprenderlo el propio actor del interdicto, cuando acudió al Alcalde de Villajuiga para que suspendiera las repetidas obras, y dicha Autoridad dictó providencia en sentido contrario á las pretensiones del demandante, por entender que la Sociedad Martí, Badosa y Compañía tenía perfecto derecho á verificar aquellas obras, y que éstas se hacían con todas las garantías y precauciones del caso;

Que, en este sentido, es también improcedente el interdicto de que se trata, pues se funda en asunto del que ha entendido la Administración en el legítimo uso de sus facultades, y, en consecuencia, que cae de lleno dentro de los preceptos de los artículos 252 y 89, respectivamente, de la ley de Aguas y Municipal, que prohiben el interdicto contra las providencias de la Administración, y de los Alcaldes en particular, dictadas en asuntos de su competencia;

Que desde el momento en que la Sociedad demandada tiene incoado ante la Administración el oportuno expediente para la declaración de utilidad pública de dichas aguas minero-medicinales, así como para la autorización para la apertura del establecimiento balneario que se proyecta, y

Que, por otra parte, el actor del interdicto tiene asimismo otorgada por la Administración la concesión del derecho que entiende perturbado, es indudable que existe cuestión previa que resolver por la misma, cual es la de determinar si el pozo de referencia está construído con arreglo á las prescripciones de la ley de Aguas, y, por consiguiente, si perjudica ó no á los manantiales vecinos legalizados por la Administración, y que en virtud de lo expuesto, el asunto objeto del interdicto se halla comprendido en los dos casos en que, según los artículos 2.° y 3.° del Real decreto de 8 de Septiembre de 1887, deben los Gobernadores suscitar cuestión de competencia á los Tribunales ordinarios.

Que substanciado el incidente, el Juez dictó auto declarándose competente, alegando:

Que, conforme al artículo 446 del Código Civil, todo poseedor tiene derecho á ser respetado en su posesión, y si fuere inquietado en ella, deberá ser amparado ó restituído en dicha posesión por los medios que las leyes de procedimiento establecen;

Que la materia litigiosa á resolver entre el demandante y la Sociedad demandada es una cuestión de carácter civil, relativa al dominio de aguas privadas, en la que hay que determinar si entre las partes litigantes existe preferencia para su aprovechamiento y si la posesión en que se encuentra el demandante de las que viene explotando en el manantial Villajuiga le da derecho para impedir que la Sociedad demandada realice las obras que viene llevando á cabo en la finca de su propiedad Huerta Martí, todo lo cual está encomendado de una manera expresa por los artículos 254 y 255 de la Ley de 13 de Junio de 1879 á los Tribunales de justicia;

Que la competencia de la jurisdicción contencioso-administrativa en materia de aguas está perfectamente determinada por el artículo 253 de dicha Ley, no encontrándose, entre los casos que taxativamente enumera esta disposición legal, la cuestión que ha de resolverse en el presente interdicto;

Que no puede considerarse como cuestión previa de la competencia de la Administración la de determinar la índole y naturaleza de las obras que ejecuta la Sociedad demandada y la consideración legal que merezca el pozo donde realiza aquéllas, pues esto ha de ser objeto de la prueba que se practique en el interdicto y que viene á constituir realmente el fondo de la cuestión litigiosa;

Que la facultad que concede el artículo 23 de la referida ley de Aguas á los Alcaldes, no significa que el perjudicado en su posesión tenga que sujetarse á este procedimiento, negándole el derecho á ejercitar sus acciones ante los Tribunales de justicia, bien en forma de interdicto ó de juicio ordinario para obtener las debidas reparaciones.

Que el Gobernador, de acuerdo con el informe de la Comisión provincial, insistió en el requerimiento, resultando de lo expuesto el presente conflicto, que ha seguido sus trámites:

Visto el artículo 23 de la ley de Aguas de 13 de Junio de 1879, que dice:

«El dueño de cualquier terreno puede alumbrar y apropiarse plenamente, por medio de pozos artesianos y por socavones ó galerías, las aguas que existan debajo de la superficie de su finca, con tal que no distraiga ó aparte aguas públicas ó privadas de su corriente natural, cuando amenazare peligro de que por consecuencia de las labores del pozo artesiano, socavón ó galería, se distraigan ó mermen las aguas públicas ó privadas destinadas á un servicio público ó á un aprovechamiento privado preexistente, con derecho legítimamente adquirido, el Alcalde, de oficio, á excitación del Ayuntamiento en el primer caso, ó mediante denuncia de los interesados en el segundo, podrá suspender las obras»:

Visto el artículo 24 de la misma Ley, según el cual:

«Las labores de que habla el artículo anterior para alumbramientos, no podrán ejecutarse á menor distancia de 40 metros de edificios ajenos de un ferrocarril ó carretera, ni á menos de 100 de otro alumbramiento ó puente, río, canal, acequia ó abrevadero público, sin la licencia correspondiente de los dueños, ó, en su caso, del Ayuntamiento, previa formación de expediente»:

Visto el artículo 254 de la propia Ley, según el cual:

«Compete á los Tribunales que ejercen la jurisdicción civil, el conocimiento de las cuestiones relativas... 1.°, al dominio de las aguas públicas y al dominio de las aguas privadas y de su posesión»:

Considerando:

1.° Que la presente cuestión de competencia se ha suscitado con motivo del interdicto promovido por D. Ramón Margineda contra la Sociedad Martí, Badosa y Compañía, porque con obras que estaba realizando dicha Sociedad en una finca que linda con la del demandante, se trataba de despojarle de la posesión de las aguas procedentes de un manantial que le pertenece, y para cuya explotación, como aguas minero-medicinales, ha obtenido la correspondiente autorización administrativa por Real orden de 15 de Julio de 1904.

2.° Que por tratarse de la posesión de aguas de carácter privado, es indudable la competencia de los Tribunales ordinarios, conforme al artículo 254 de la Ley de 13 de Junio de 1879.

3.° Que de los autos y del expediente no resulta que el interdicto pueda contrariar providencia alguna administrativa, pues lo único que aparece es que la Sociedad demandada ha incoado un expediente pidiendo la concesión de aprovechamiento de las aguas que trata de alumbrar, pero en el cual no se había dictado resolución con anterioridad á la presentación de la demanda de interdicto.

4.° Que la facultad que concede el artículo 23 de la ley de Aguas, no excluye otro medio de amparar la posesión, ya sea por la vía de interdicto ya por la del juicio declarativo, puesto que la intervención que dicho artículo da al Alcalde, es sólo á prevención y sin perjuicio de las demás acciones y recursos legales.

Conformándome con lo consultado por el Consejo de Estado,

Vengo en decidir esta competencia á favor de la Autoridad judicial.

Dado en Palacio á veinticuatro de Marzo de mil novecientos once.

ALFONSO.

El Presidente del Consejo de Ministros,
José Canalejas.

MINISTERIO DE HACIENDA

REALES DECRETOS

A propuesta del Ministro de Hacienda y de conformidad con lo determinado por el artículo 14 del Reglamento de la Ordenación de Pagos del Estado de 24 de Mayo de 1891,

Vengo en disponer que cese en el cargo de Ordenador de pagos del Ministerio de Marina, D. Ricardo Iglesias y López, y se encargue del desempeño del mismo destino D. Miguel Fontenla y do Pico, Ordenador de Marina de primera clase é Interventor de la misma Ordenación.

Dado en Palacio á veintitrés de Marzo de mil novecientos once.

ALFONSO.

El Ministro de Hacienda,
Eduardo Cobián.

A propuesta del Ministro de Hacienda, de acuerdo con el Consejo de Ministros, y como caso comprendido en el número 7.° del artículo 6.° del Real decreto de 27 de Febrero de 1852,

Vengo en exceptuar de las formalidades de subasta pública la adquisición de papel blanco continuo, arpilleras para su enfarde y demás gastos que ocasione la elaboración de los recibos de la Contribución territorial, correspondientes á los trimestres segundo, tercero y cuarto del actual ejercicio, redactados con arreglo á las prescripciones de la Ley de 29 de Diciembre último, cuyo importe, de 39.654,98 pesetas, según presupuesto formado por la Administración de la Fábrica Nacional de la Moneda y Timbre, será satisfecho con cargo al crédito consignado en la Sección décima, capítulo 19, artículo 1.° del Presupuesto vigente.

Dado en Palacio á veintitrés de Marzo de mil novecientos once.

ALFONSO.

El Ministro de Hacienda,
Eduardo Cobián.

MINISTERIO DE LA GUERRA

REALES ÓRDENES

Excmo. Sr.: El Rey (q. D. g.), de conformidad con el informe emitido por la Inspección General de los Establecimientos de Instrucción é Industria militar, que á continuación se inserta, y por resolución de 5 del corriente mes, ha tenido á bien conceder al Capitán de Ingenieros D. Eduardo Gallego Ramos, la cruz de primera clase del Mérito Militar, con distintivo blanco, pensionada con el 10 por 100 del sueldo de su actual empleo hasta su ascenso á General ó retiro, como comprendido en las disposiciones que en el referido informe se mencionan.

De Real orden lo digo á V. E. para su conocimiento y efectos. Dios guarde á V. E. muchos años. Madrid, 22 de Marzo de 1911.

AZNAR.

Señor Capitán general de la primera Región.

Informe que se cita.

Hay un membrete que dice: «Inspección General de los Establecimientos de Instrucción é Industria Militar».

«Excmo. Sr.: De Real orden, fecha 27 de Octubre último, se remitió á informe de esta Inspección General la instancia que eleva en súplica de recompensa el Capitán de Ingenieros D. Eduardo Gallego y Ramos, como autor de la obra titulada «Saneamiento de poblaciones (urbanas y rurales)», acompañándose un ejemplar de la misma, oficio de remisión del Gobernador militar de Melilla, informes de la Junta facultativa de Ingenieros y de la de Profesores de la Escuela Superior de Arquitectura de Barcelona, un certificado del Secretario de la Sociedad Española de Higiene, participando al interesado habérsele concedido el premio correspondiente á un concurso celebrado en 1907, un autógrafo en que consta que el referido trabajo forma parte del plan de estudios de la carrera de Ingeniero constructor, que se cursa en la Universidad de Santo Tomás, de Manila, y copias de las hojas de servicios y de hechos del citado Capitán.

»El Comandante de Ingenieros de Melilla, en el informe marginal de la instancia, señala á grandes rasgos los principales puntos que abarca el libro, manifestando que es de utilidad para los Oficiales de Ingeniero á cuyo cargo está la construcción de hospitales y cuarteles, y termina considerando la obra comprendida en el vigente Reglamento de Recompensas.

»La Junta de Profesores de la Escuela de Arquitectura de Barcelona, aprueba el meditado estudio que acerca de este trabajo hace el ponente nombrado, el cual, además de poner de manifiesto las cuestiones de mayor interés que el autor desarrolla con mucha inteligencia, emite la siguiente opinión:

«Si para Arquitectos é Ingenieros esta obra es recomendable, justo es que en las Escuelas en donde se forman estos facultativos se conozca; y al tener la honra de explicar la asignatura de salubridad é higiene de poblaciones y de edificios, así que conocí la publicación del Sr. Gallego, la recomendé á mis alumnos como perfecta obra de consulta, en lo que se refiere especialmente á las cuestiones de las inmundicias en general y de las aguas destinadas á la alimentación, problemas ambos tratados de un modo magistral»; y concluye felicitando al autor «que tan científica y prácticamente ha sabido ofrecer una publicación didáctica por excelencia y obra de consulta de verdadero valor.»

»Extensamente la examina la Junta facultativa de Ingenieros, y después de encomiar la labor realizada, sintetiza su parecer en las dos conclusiones siguientes:

»1.ª Que «tiene verdadera importancia por las doctrinas que desarrolla, soluciones que ofrece á los diversos problemas de la higiene y copiosísimo arsenal de datos que comprende.

»2.ª Que el autor se ha hecho acreedor, por su celo y aplicación y por haber producido una obra de gran utilidad para el Ejército, á ser premiado con algunas de las recompensas que señala el Reglamento vigente de 27 de Septiembre de 1900.»

»Constituye el trabajo un volumen en 4.° mayor, impreso, de 583 páginas con 310 figuras intercaladas, y consta de: Prólogo del Doctor Larra y Cerezo; Introducción; cinco partes, que comprenden 36 capítulos; apéndice é índice.

»En la breve introducción manifiesta el autor que su finalidad es «compendiar los recursos de que la construcción dispone para satisfacer las exigencias de la sanidad y de la higiene».

»En el primer capítulo señala las condiciones que han de reunir las poblaciones para ser consideradas como salubres, demostrando la transcendencia que tienen aquéllas, é inserta gráficos comparativos acerca de la mortalidad en las capitales de provincia de España y en las grandes ciudades del mundo, resultando de su examen la triste enseñanza de que Madrid y Sevilla figuran al lado de las más insanas de la India y Egipto.

Analiza en los 17 capítulos siguientes de que consta la primera parte, la composición y cualidades del aire puro, clasificando las impurezas que lo alteran en sólidas, líquidas y gaseosas; presenta, bajo el epígrafe de «Recogida y alojamiento de inmundicias líquidas», un estudio muy completo de las aguas residuales (de alcantarilla é industriales), explicando con mucha claridad los actualos sistemas de alcantarillado (unitario, separativo y mixto), y cita especialmente el sistema separativo Warnig, como tipo aceptado en los proyectos de saneamiento más modernos realizados en España (Bilbao, Sevilla, Valladolid, Zaragoza y Vitoria); da á conocer los materiales de construcción más adecuados, pendientes, profundidad, sección y diámetro de los conductos; consigna el importante y motivado voto del Congreso internacional de saneamiento y salubridad de la habitación, celebrado en París en 1904, que aconseja la conveniencia de suprimir el sifón terminal en la acometida de las alcantarillas; refiere la manera de ventilarlas y limpiarlas, y al ocuparse, con gran dominio en ingeniería sanitaria, del invertimiento de las aguas de alcantarilla, expone las nuevas ideas en que se basa la depuración biológica, ya sea la natural por medio de los campos de esparcimiento, según se practica en los alrededores de París, y de los que hace el autor una magnífica descripción, ya de la artificial en combinación ó sin ella con la utilización agrícola.

»Estudia, con arreglo á los trabajos de Cameron, Bezault y Calmette, los fosos sépticos, los filtros bacterianos y su clasificación, describiendo, en la función continua de los mismos, los aparatos de percolación y la columna depuradora de Rouchi; prosigue tratando de la depuración de las aguas residurales por procedimientos mecánicos, mecánico-químicos y físicos, razonando la superioridad que tienen sobre éstos, los biológicos; considera á los pozos negros, cuya construcción detalla, como la forma más antihigiénica de recoger la excreta; expresa los fundamentos científicos de los pozos Mouras, y su aplicación en la práctica: describe los fosos sépticos Gautier y Bezault, el sifón séptico, automático y el autodiluidor de Bezault, y, finalmente, al ocuparse de las instalaciones bacterianas, señala, como un buen ejemplar, la montada en el barrio obrero Reina Victoria, de esta Corte.

»Examina el tratamiento de las basuras y de los diversos procedimientos de impedir su fermentación, entre los cuales cita los destructores Horsfall y el sistema mixto de incineración y aprovechamiento agrícola, preferente por ser más útil y práctico; da á conocer las reglas higiénicas y los modelos de cajas y carros para la recogida y transporte de las basuras, así como las del riego, desolado, petrolado y alquitronado, para combatir el polvo y barro de las calles y carreteras; enumera los medios de tratar los cadáveres de los animales y humanos, con noticias detalladas de los hornos crematorios, manera de funcionar, medios de neutralizar los humos y gases perjudiciales á la salud, y termina esta larga é interesante parte de la obra, que la ilustran 152 figuras, dedicando un acabado estudio á la desinfección en general, y con este motivo reseña los aparatos sanitarios reglamentarios para realizarla en España.

»La segunda parte, titulada «Cantidad y calidad de las aguas», comprende siete capítulos; empieza el autor por explicar las propiedades y composición del agua potable y los análisis hidrotimétrico, bacteriológico y microscópico, y previos oportunos razonamientos é inserción de cuadros comparativos, determina, con arreglo á las exigencias de la higiene, la cantidad necesaria por día y por habitante.

»Señala también las distintas procedencias de las aguas, las cualidades que las distinguen y que las hacen á propósito para los usos de la vida, recomendando con gran interés se practiquen periódicamente análisis físicoquímicos y bacteriológicos que aseguren su bondad, ocupándose seguidamente de la captación y protección de las mismas, según se trate de las de lluvia, superficiales ó subterráneas, de los preceptos que son indispensables para conservar su pureza, é indica á la vez el alumbramiento y utilización práctica de las subterráneas, mediante construcción de pozos, galerías y drenajes.

»Desenvuelve, con gran competencia y profundo conocimiento de las ciencias físicoquímicas y biológicas, el vital problema de mejorar la calidad de las aguas potables; la clarificación, filtración natural y la artificial por la arena, la industrialización de los filtros y las diversas patentes que ofrece el comercio; los filtros bacteriológicos sistema Candy, los de arena no sumergida, representación estos últimos de gran progreso higiénico, según se prueba por los resultados hasta ahora obtenidos y que puntualiza el autor; la ozonización, ó sea la esterilización eléctrica del agua por el ozono, sistema novísimo y al que augura brillante porvenir, describiendo de todos estos procedimientos los aparatos que se emplean, funciones que ejercen y medios eficaces de llevar á la práctica la depuración higiénica del agua potable, terminando con la explicación de su almacenamiento en adecuados depósitos, su conducción y su distribución por acueductos, tuberías y canales descubiertos, y copiando los acuerdos del Congreso de Marsella referentes á la cuestión.

»Dedica dos capítulos de la tercera parte á relatar los peligros que para la salud ofrece la humedad del suelo y del subsuelo y á la manera de combatirla; á este fin hace un perfecto análisis de los drenajes y plantaciones de árboles, que bien dirigidos determinan el descenso de la capa acuífera subterránea y suprimen el estancamiento de las aguas superficiales; á continuación reseña los procedimientos para la destrucción de los mosquitos, á veces agentes portadores de graves infecciones, presentando notables ejemplos de salubridad de extensos terrenos encharcados y pantanosos, conseguida por los medios generales de desecación, que muy atinadamente describe.

»La cuarta y quinta parte de la obra, que ocupa siete capítulos, pudieran refundirse en una sola, pues no se concibe la existencia de la habitación sana, de que trata la última, sin que concurran los grandes elementos purificadores: aire, luz y sol, que estudia la primera; fija el autor, previas consideraciones pertinentes, las proporciones y orientación de las calles, altura de las casas, dimensiones de los llamados espacios libres (plazas, parques y jardines); apoyado todo ello en la necesidad de transformar y destruir casas insalubres (en la página 447 dice que existen en Madrid 438 casas declaradas «oficialmente insalubres», albergando una población de 52.521 personas), y en la de llevar el registro sanitario de viviendas, que se practica con éxito satisfactorio en varias poblaciones belgas y francesas; inserta al efecto varios modelos para redactar esa estadística con arreglo á las sabias conclusiones de recientes Congresos internacionales de saneamiento y salubridad pública, que cita, y á las reglamentaciones sanitarias de varias naciones, entre las cuales se halla España; presentando, finalmente, varios tipos de casas higiénicas para obreros, de las que son ejemplo las construídas en el referido barrio «Reina Victoria».

»Los problemas de aireación, ventilación, dotación de agua de la vivienda sana, los resuelve el autor ampliamente, mediante numerosos datos, y hace un acabado estudio de los sistemas hasta el día conocidos de calefacción, indicando los más perfeccionados y que mejor responden á sus peculiares fines.

»Constituye el apéndice con que finaliza la obra, la enumeración crítica, en dos capítulos, de la legislación y organización sanitaria en España, transcribiendo las leyes reglamentarias, Reales órdenes y artículos pertinentes del Código Penal, con anotación de las omisiones y deficiencias que oportunamente puntualiza el autor, y después de referir las medidas que debe adoptar el Estado y el Municipio para reducir la mortalidad en España, reproduce dos proyectos de reglamentos sanitarios redactados por el Comité consultivo de higiene pública en Francia, aplicables, respectivamente, á las ciudades y aglomeraciones urbanas, y á los pueblos y municipios rurales.

»Cuenta el Capitán Gallego veinticuatro años de servicios con abonos, y tiene buena conceptuación; se halla condecorado con dos cruces de primera clase de María Cristina, una de ellas en permuta del empleo que le fué concedido por su distinguido comportamiento en la toma de Dasmariñas; siete cruces del Mérito Militar con distintivo rojo (cuatro pensionadas); tres de la misma Orden con distintivo blanco (dos pensionadas dentro de su actual empleo), como premio á sus obras «Memoria de la campaña de Mindanao», «Municionamiento de la Infantería», «Trabajos de campaña y herramientas de las tropas de Infantería», «Empleo de la telegrafía óptica en la guerra contemporánea», «Proyecto de reorganización y mejora del Ejército de tierra», una mención honorífica y una anotación por otras dos obras, y las medallas de las campañas de Luzón y Mindanao, la de Alfonso XIII y la de plata de los Sitios de Zaragoza.

»Es Caballero de la Orden civil de Alfonso XII, y ha sido nombrado miembro de la Sociedad francesa de Higiene.

»El extracto que antecede permite formar idea aproximada, tanto de la utilísima é intensa labor realizada por dicho Capitán, que representa una enorme cantidad de trabajo, como de su mucha cultura, conocimientos bibliográficos y completo dominio que demuestra poseer acerca de los problemas de saneamiento de las grandes y pequeñas urbes; en su obra, si bien no se encuentran transcendentales descubrimientos de aparatos y sistemas nuevos que modifiquen la función sanitaria de las aglomeraciones urbanas, ni aparecen tratadas otras cuestiones que no sean ya conocidas, tiene, sin embargo, el singular mérito de ser la primera publicada en España que se ocupa de la aplicación de la ciencia del Ingeniero constructor á la resolución práctica de cuestiones de higiene pública.

»Si no bastaran para encomiar su notoria importancia los luminosos informes de las Corporaciones técnicas que se citan, ni el certero juicio expresado por el autor respecto á las verdaderas causas del atraso nacional en materias higiénicas, entre las cuales menciona como las principales, la falta de una buena ley de Expropiación forzosa por causa de insalubridad de viviendas, y la de no existir sanción penal para las infracciones sanitarias, vendría á dar al libro su merecido realce y justo valor la consideración de ser original, bien planeado, eminentemente científico y social, y en el que, con claridad de conceptos y sencillez de expresión, se difunden conocimientos de indiscutible utilidad, y además se prueba la disminución de la mortalidad que acusan las estadísticas demográficas de los pueblos que atienden como deben, en la práctica, las lecciones de la higiene.

»Es evidente que esta obra puede prestar positivos servicios al Ejército, puesto que el Ingeniero y el Médico militar, para el desempeño de sus respectivos cometidos, han de encontrar en ella valiosas enseñanzas; y en tal concepto, la Junta de esta Inspección General, estimando su mérito y utilidad comprendidos en lo dispuesto en el caso 4.° del artículo 20 del vigente Reglamento de Recompensas en tiempo de paz, y teniendo presente lo que previene el 22 del mismo, por cuanto su autor, el Capitán de Ingenieros D. Eduardo Gallego, es un notable y conocido publicista militar, condecorado con numerosas cruces por méritos de campaña y profesionales, opina, por unanimidad, que procede proponerle para la concesión de la cruz de primera clase del Mérito Militar con distintivo blanco, pensionada con el 10 por 100 del sueldo de su actual empleo, hasta su ascenso á General ó retiro.

»V. E., no obstante, resolverá lo que estime más acertado.

»Madrid, 22 de Diciembre de 1910.=El Coronel de Estado Mayor, Secretario, José Villar.=Rubricado.=V.° B.°, Zappino.=Rubricado.»

»Hay un sello que dice: «Inspección General de los Establecimientos de Instrucción é Industria Militar.»

Excmo. Sr.: Vista la instancia promovida por D. Santos de Elías y de los Cobos, vecino de esta Corte, calle Sagasta, número 4, en solicitud de que le sean devueltas las 1.500 pesetas que depositó en la Delegación de Hacienda de la provincia de Madrid, según carta de pago número 148, expedida en 23 de Septiembre de 1910, para redimir del servicio militar activo á su hijo Manuel Elías y Ripoll, recluta del Reemplazo de 1910, perteneciente á la zona de Madrid;

El Rey (q. D. g.), teniendo en cuenta que el interesado está comprendido en el caso 1.° del artículo 83 de la ley de Reclutamiento, y lo prevenido en el artículo 175 de la misma, se ha servido resolver que se devuelvan las 1.500 pesetas de referencia, las cuales percibirá el individuo que efectuó el depósito ó la persona apoderada en forma legal, según dispone el artículo 189 del Reglamento dictado para la ejecución de dicha Ley.

De Real orden lo digo á V. E. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. E. muchos años. Madrid, 21 de Marzo de 1911.

AZNAR.

Señor Capitán general de la primera Región.

Excmo. Sr.: Vista la instancia promovida por José Romero Gey, vecino de Santiago, provincia de la Coruña, en solicitud de que le sean devueltas las 1.500 pesetas que depositó en la Delegación de Hacienda de la mencionada provincia, según carta de pago número 134, expedida en 31 de Diciembre de 1907, para redimirse del servicio militar activo como recluta del Reemplazo de 1907, perteneciente á la zona de la Coruña, número 50;

El Rey (q. D. g), teniendo en cuenta lo prevenido en el artículo 175 de la ley de Reclutamiento, se ha servido resolver que se devuelvan las 1.500 pesetas de referencia, las cuales percibirá el individuo que efectuó el depósito, ó la persona apoderada en forma legal, según dispone el artículo 189 del Reglamento dictado para la ejecución de dicha ley.

De Real orden lo digo á V. E. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. E. muchos años. Madrid, 22 de Marzo de 1911.

AZNAR.

Señor Capitán general de la octava Región.

Excmo. Sr.: Vista la instancia promovida por Ramón Boullón Pau, vecino de Santiago, provincia de Coruña, en solicitud de que le sean devueltas las 1.500 pesetas que depositó en la Delegación de Hacienda de la mencionada provincia, según carta de pago número 133, expedida en 31 de Diciembre 1907, para redimirse del servicio militar activo, como recluta del Reemplazo de 1907, perteneciente á la zona de la Coruña, número 50;

El Rey (q. D. g.), teniendo en cuenta lo prevenido en el artículo 175 de la ley de Reclutamiento, se ha servido resolver que se devuelvan las 1.500 pesetas de referencia, las cuales percibirá el individuo que efectuó el depósito, ó la persona apoderada en forma legal, según dispone el artículo 189 del Reglamento, dictado para la ejecución de dicha ley.

De Real orden lo digo á V. E. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. E. muchos años. Madrid, 22 de Marzo de 1911.

AZNAR.

Señor Capitán general de la octava Región.

Excmo. Sr.: Vista la instancia promovida por Saturnino Matamoros Navarro, vecino de Santa Pola, provincia de Alicante, en solicitud de que le sean devueltas las 1.500 pesetas que depositó en la Delegación de Hacienda de la provincia indicada, según carta de pago número 478, expedida en 14 de Diciembre de 1909, para redimirse del servicio militar activo como recluta del Reemplazo de dicho año, perteneciente á la zona de Alicante,

El Rey (q. D. g.), teniendo en cuenta lo prevenido en el artículo 175 de la ley de Reclutamiento, y de acuerdo con lo informado por el Consejo Supremo de Guerra y Marina en 9 del mes actual, se ha servido resolver que se devuelvan las 1.500 pesetas de referencia, las cuales percibirá el individuo que efectuó el depósito, ó la persona apoderada en forma legal, según dispone el artículo 189 del Reglamento dictado para la ejecución de dicha ley.

De Real orden lo digo á V. E. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. E. muchos años. Madrid, 23 de Marzo de 1911.

AZNAR.

Señor Capitán general de la tercera Región.

Excmo. Sr.: Vista la instancia promovida por Juan Subatella Sellent, vecino de Moncada, provincia de Barcelona, en solicitud de que le sean devueltas las 1.500 pesetas que depositó en la Delegación de Hacienda de la provincia indicada, según carta de pago número 214, expedida en 31 de Diciembre de 1908, para redimirse del servicio militar activo como recluta del Reemplazo de dicho año, perteneciente á la zona de Mataró,

El Rey (q. D. g.), teniendo en cuenta lo prevenido en el artículo 175 de la ley de Reclutamiento y lo informado por el Consejo Supremo de Guerra y Marina en 9 del mes actual, se ha servido resolver que se devuelvan las 1.500 pesetas de referencia, las cuales percibirá el individuo que efectuó el depósito, ó la persona apoderada en forma legal, según dispone el artículo 189 del Reglamento dictado para la ejecución de dicha ley.

De Real orden lo digo á V. E. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. E. muchos años. Madrid, 23 de Marzo de 1911.

AZNAR.

Señor Capitán general de la cuarta Región.

REAL ORDEN CIRCULAR

Excmo. Sr.: En cumplimiento á lo ordenado en disposiciones vigentes, respecto á publicación de convocatorias para Academias militares, el REY (q. D. g.), se ha servido disponer lo siguiente:

1.° El día 15 de Julio próximo, darán principio los exámenes de ingreso en las Academias militares de Infantería, Caballería, Artillería, Ingenieros y Administración Militar, establecidas, respectivamente, en Toledo, Valladolid, Segovia, Guadalajara y Avila.

2.° El número de alumnos que podrá admitir cada Academia, es el siguiente:

Infantería, 250.
Caballería, 25.
Artillería, 100
Ingenieros, 30.
Administración Militar, 25.

3.° Además de las plazas señaladas, entrarán fuera de número los aspirantes aprobados á quienes no corresponda plaza por la calificación obtenida y se hallen comprendidos en el Real decreto de 21 de Agosto de 1909 (*C. L.*, núm. 174). De igual derecho disfrutarán los hijos de militar ó marino condecorado con la Cruz de San Fernando, obtenida en virtud de juicio contradictorio, con arreglo á la ley de 18 de Mayo de 1862, siempre que la concesión se haya hecho con anterioridad á la fecha del expresado Real decreto.

4.° El concurso tendrá lugar con arreglo á las bases que se expresan, sujetándose los exámenes en todas las Academias á las papeletas que á continuación se insertan, no debiendo exigirse las notas que figuran en los textos.

5.° Los oficiales del Ejército y sus asimilados no podrán presentarse en los concursos para ingreso en las Academias militares, ni serán admitidos como alumnos.

6.° Se observarán en un todo las prescripciones del Reglamento aprobado por Real decreto de 27 de Octubre de 1897 (*C. L.*, núm. 281), en los artículos del 59 al 92, ambos inclusive.

7.° Por ningún motivo se admitirá mayor número de alumnos que el señalado en los párrafos 2.° y 3.° de la presente disposición; cubriéndose con los aprobados sin plaza y por orden de censuras, solamente hasta el día 15 de Septiembre próximo, las vacantes que ocurran por separación ó falta de presentación entre los de nueva entrada. Será nombrado alumno el aspirante aprobado sin plaza á quien se concedan los beneficios de ingreso y permanencia antes de la indicada fecha.

8.° Al ingresar en las Academias los alumnos procedentes de la clase de paisano, serán filiados y prestarán el juramento de banderas.

De Real orden lo digo á V. E. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. E. muchos años. Madrid, 14 de Marzo de 1911.

AZNAR.

Señor...

Bases que se citan para el concurso de ingreso en las Academias militares, que ha de tener lugar el día 15 de Julio próximo.

Artículo 1.° Para ingresar en las Academias militares necesitan reunir los aspirantes las circunstancias siguientes:

a) Ser ciudadano español, soltero ó viudo, sin hijos;

b) Estar comprendido en los límites de edad que á continuación se expresan:

LÍMITE MÁXIMO.—Edad de los aspirantes en 31 de Diciembre de 1910:

Aspirantes paisanos, hijos de paisanos, menos de veintiún años.

Aspirantes paisanos, hijos de militar, menos de veintidós años.

Aspirantes individuos de tropa, con menos de dos años de servicio en filas, menos de veintitrés años.

Aspirantes individuos de tropa, con más de dos años de servicio en filas, menos de veintiocho años.

LÍMITE MÍNIMO.—Prevenido por Real orden de 4 de Julio de 1896 (*D. O.* número 148) que no puede ejercerse el empleo de Oficial fuera de las Academias militares antes de los diecisiete años, y que á este precepto se sujete la edad mínima que debe exigirse tengan los aspirantes á ingreso, habrán de acreditar que tienen edad suficiente para llegar á los diecisiete años antes de las fechas que se expresan:

Infantería, 1.° de Septiembre de 1914.
Caballería, ídem íd.
Artillería, ídem de 1916.
Ingenieros, ídem íd.
Administración Militar, ídem de 1914;

c) Tener las aptitudes físicas necesarias, cuya apreciación se hará por un Tribunal facultativo, compuesto de tres Médicos militares que tengan destino en la localidad donde radica la Academia, figurando entre ellos, en cada Tribunal, los del respectivo Centro de enseñanza; los Gobernadores militares, de acuerdo con los Directores de las Academias, dispondrán lo conveniente para que dicho Tribunal se constituya y actúe en relación con los ejercicios de examen. En el caso de que en una Academia no pueda constituirse el Tribunal facultativo en la forma indicada, por falta de personal, el Gobernador militar lo pondrá en conocimiento del Capitán general con la debida anticipación, el cual cumplimentará lo anteriormente dispuesto, valiéndose, al efecto, del personal del Cuerpo de Sanidad Militar de la región. El referido Tribunal aplicará á todos los aspirantes el cuadro general de exenciones vigentes para el ingreso en el Ejército. El resultado del reconocimiento facultativo verificado en esta forma tendrá carácter *definitivo é inapelable*, quedando sin curso las instancias que se promuevan en solicitud de nuevo reconocimiento. En la convocatoria del año actual, el resultado del reconocimiento verificado en una Academia será valedero para las demás.

Los Directores de ellas facilitarán á los aspirantes que lo deseen un certificado del reconocimiento sufrido, cualquiera que sea su resultado, dándose cuenta á las demás Academias de los que vayan resultando *inútiles ó útiles condicionales*. Dichos certificados serán expedidos por los tres Médicos que forman el Tribunal facultativo, con el *visto bueno* del Director;

d) Los aspirantes deberán tener la estatura y desarrollo físico proporcionado á su edad;

e) Carecer de todo impedimento para ejercer cargos públicos;

f) No haber sido expulsado de ningún Establecimiento oficial de enseñanza.

Para optar á los beneficios de edad que se concede á los individuos de tropa, es necesario que éstos se hallen presentes en filas al solicitar el ingreso, ó bien en la situación de licencia ilimitada en el Ejército ó inscriptos disponibles en la Marina, ambas situaciones por exceso de fuerza (Real orden de 18 de Agosto de 1894, *C. L.* núm. 247).

Los que fuesen voluntarios necesitan llevar más de dos años en filas, precisamente, en 1.° de Septiembre.

Los individuos de tropa que hayan ingresado en el servicio en calidad de voluntarios, y que después hayan sido declarados soldados en virtud de la ley de Reclutamiento, se considerarán para los beneficios de edad, como de reclutamiento forzoso, contándoseles en este concepto el tiempo servido desde que ingresaron en el servicio.

Art. 2.° Los aspirantes á ingreso en cualquier Academia, solicitarán examen en instancia, al Director de ella, formulada en papel del sello de 11.ª clase, acompañando acta civil de nacimiento, legalizada debidamente si está extendida en distrito notarial diferente de aquel en que se halla enclavada la Academia; y á los mayores de catorce años, cédula personal, que se devolverá al interesado en el plazo más breve posible, y certificado de soltería ó de ser viudo sin hijos.

Las instancias documentadas deberán encontrarse en las respectivas Academias el día 15 de Junio próximo, teniendo por no presentadas las que se reciban después de la mencionada fecha.

Art. 3.° Además de los documentos anteriores, los hijos de militar ó marino acreditarán esta circunstancia con copia legalizada del último Real despacho, expedido á favor de su padre, ó de la Real orden de su empleo, y los hijos de los condecorados con la Cruz de San Fernando, á que se hace referencia en el artículo 3.° de la presente disposición, en forma análoga.

Art. 4.° Los huérfanos ó hermanos de militar ó marino con derecho á beneficios para el ingreso y permanencia en las Academias militares, deberán acreditarlo con copia de la Real orden en que se reconozca oficialmente esta circunstancia.

Art. 5.° Los individuos de tropa del Ejército ó Armada, presentarán las instancias por conducto de sus Jefes naturales, quienes las cursarán directamente y en el más breve plazo, á las Academias, acompañando copia de la filiación del interesado y hoja de castigos.

Art. 6.° Recibidas las instancias y examinadas por las Juntas facultativas de las Academias, el Director de cada una comunicará á los aspirantes haber sido admitidos á examen, ó las razones que se opongan á ello, á medida que se vayan recibiendo.

El oficio de admisión á examen en una Academia, puede suplir á la documentación al solicitar examen en otra, siempre con sujeción á lo dispuesto en el 2.° párrafo del artículo 2.°

Art. 7.° El orden en que los aspirantes han de sufrir los exámenes se determinará por sorteo, que se celebrará en las Academias el 5 de Julio, y al que los interesados podrán concurrir si lo desean.

La Academia comunicará á los interesados las fechas en que deban verificar todos los actos del examen. Queda autorizado el cambio de número entre los aspirantes, que se acreditará manifestándolo al Director de la Academia en oficio firmado por los interesados.

Cuando haya dos ó más aspirantes que sean hermanos, se incluirá en sorteo solamente á uno de ellos, considerándose á los otros con el mismo número que el primero, para que sean examinados en la misma tanda, pudiendo verificar el cambio de número, colectivamente ó por separado.

El certificado de haber estado examinándose un aspirante en otra Academia en los días en que debería presentarse á sufrir examen en una de ellas, surtirá los mismos efectos que el de enfermedad.

Art. 8.º Todos los aspirantes que tomen parte en los concursos de ingreso, satisfarán en concepto de derechos de examen la cantidad de 25 pesetas, que deberán abonarse antes de empezar el examen del primer ejercicio. Están exentos del pago de estos derechos los comprendidos en el apartado 3.º de la presente disposición, y además los hijos de individuos de tropa, los de viuda de militar sin derecho á pensión de viudedad ó que ésta sea menor que la de jefe, huérfanos con pensión y sargentos, cabos y soldados, procedentes de alistamiento, con más de dos años de servicio en filas.

Art. 9.º Los exámenes de ingreso se subdividirán en tres ejercicio:

Primer ejercicio.—Gramática Castellana.—Geografía.—Historia universal y particular de España.—Lectura y traducción del francés.—Dibujo de figura.

El examen de dibujo consistirá en copiar de estampa una cabeza.

Segundo.—Aritmética y Algebra.

Tercero.—Geometría.—Trigonometría rectilínea.

Los programas para el examen de Gramática Castellana, Geografía é Historia de España y universal, serán los aprobados por Real orden de 12 de Febrero de 1891 (C. L. núm. 63), y los textos, el compendio de Gramática y prontuario de Ortografía de la Real Academia Española; Geografía, Villalba; Historia de España, Beltrán; Historia universal, Castro, aumentada por Sales y Ferré.

Art. 10. El examen de Gramática, Geografía é Historia, puede sustituirse por certificados de aprobación, expedidos por un Instituto de segunda enseñanza, por una Academia militar, Colegios de Trujillo, María Cristina, Santiago, Santa Bárbara y San Fernando, Huérfanos de la Guerra y Alfonso XIII, Negociado de Escuelas del Ministerio de Marina, como igualmente por las Escuelas oficiales de Industria y Comercio, según lo preceptuado en las disposiciones vigentes.

Los certificados de aprobación de las asignaturas nombradas, expedidos con arreglo al plan de segunda enseñanza aprobado por Real orden de 27 de Agosto de 1891, deberán comprender en Geografía la aprobación de los primero y segundo años.

Art. 11. Las notas numéricas que expresan el resultado de los exámenes, serán cuatro: una en Aritmética, otra en Algebra, otra en Geometría y otra en Trigonometría, necesitándose la nota mínima de siete en cada asignatura por separado, para que se considere aprobado un aspirante.

Art. 12. En los exámenes de Francés, Dibujo, Geografía, Historia y Gramática, no habrá más calificación que *aprobado* ó *desaprobado*, y por tanto, no influirá en el orden de preferencia.

La aprobación de Francés y Dibujo en una Academia, será válida para las demás, mediante presentación del certificado correspondiente.

Los aspirantes que se hallen en posesión de los certificados de utilidad física y de aprobación del primer ejercicio en una Academia, y deseen presentarse en otra, bastará que lo verifiquen el día que les corresponda el segundo ejercicio.

Art. 13. Los Directores dispondrán la distribución de tandas de aspirantes y número de Tribunales, de tal modo que los exámenes queden terminados el 15 de Agosto, según dispone la Real orden circular de 24 de Febrero último (*D. O.* número 46).

Art. 14. Los aspirantes desaprobados en uno de los ejercicios, lo serán definitivamente; no tomando parte en el segundo y tercero los desaprobados en el primero, ni en el tercero los desaprobados en el segundo.

A la terminación de los exámenes, y á propuesta de los Directores, se publicarán en el *Diario Oficial* las Reales órdenes de nombramiento de alumno á favor de los aspirantes que en cada Academia hayan obtenido plaza; los que figuren en más de una, deberán notificar su elección á los Directores de aquéllas en que hayan sido nombrados alumnos, siendo reemplazados en las no elegidas por los aprobados sin plaza que ocupen los primeros puestos, y si alguno de éstos figurase en cualquiera de las primitivas relaciones, será consultado por el Director de la nueva Academia en que le corresponda plaza; con arreglo al resultado de estas consultas se hará una segunda propuesta de nombramiento de alumnos. Los Directores, una vez terminados los exámenes, cambiarán entre sí las relaciones de aprobados sin plaza, á fin de llevar á cabo con la mayor exactitud los nombramientos, en la forma que anteriormente se indica.

Art. 15. Los Directores de las Academias, remitirán á la Sección de Instrucción, Reclutamiento y Cuerpos diversos de este Ministerio, los documentos siguientes:

1.º Antes del día 15 de Julio, relación nominal, por orden alfabético, de todos los aspirantes que hayan concurrido á la convocatoria, con expresión del número y tanda que á cada uno haya correspondido en el sorteo, y fechas en que han de verificar el reconocimiento y ejercicios de examen;

2.º Diariamente, relación de los examinados, expresando las notas numéricas obtenidas en los ejercicios segundo y tercero y las de *aprobado* y *desaprobado* en el primero, y

3.º Terminados los exámenes, además de la propuesta de nombramiento de alumnos, relación general por orden de censuras, del resultado de aquéllos, con expresión de las calificaciones obtenidas.

Art. 16. Los aspirantes admitidos en clase de alumnos se presentarán en las Academias para la revista de Septiembre próximo, y desde aquella fecha quedarán sometidos al Código Militar en la parte que les concierne, y á los Reglamentos y disposiciones vigentes.

Art. 17. Para ayudar á la educación de los hijos y huérfanos de militares, se adjudicarán las pensiones que se consignen en presupuesto, con arreglo á las bases establecidas en el Real decreto de 7 de Octubre de 1895 (*C. L.* núm. 331).

Art. 18. Los alumnos de las Academias militares usarán los uniformes reglamentarios en ellas. Los que deban ser internos, presentarán los objetos y equipo que por la Academia se les indicará oportunamente.

Art. 19. Los alumnos internos satisfarán las cuotas de pensión establecidas para la Academia de Infantería, ó las nuevas que se determinen por Real orden, y que serán mayores que las que se satisfacen en la actualidad.

PAPELETAS

Aritmética.—Texto: Salinas y Benítez.

Quinta edición (1904).

PAPELETA 1.ª

NÚMEROS ENTEROS. — Definiciones. — Unidad y número.—Formación de los números y operaciones numéricas.—Algoritmia y algoritmo.—Aritmética.—Numeración.

NUMERACIÓN HABLADA. — Nomenclatura.—Fundamento de la nomenclatura.—Unidades de diversos órdenes.—Base del sistema.—Nomenclatura decimal. — Denominación de un número cualquiera.—Teorema: Todo número mayor que nueve puede descomponerse en colecciones de unidades de diversos órdenes, de modo que cada una de ellas contenga un número inferior á diez.—Particularidades y modificaciones de la nomenclatura decimal.—Resumen de la nomenclatura. (Párrafos 1 al 14.)

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE DOS NÚMEROS. — Definiciones y consecuencias. — Números primos entre sí.—Principio fundamental.—Teorema: El *m. c. d.* de dos números, no divisibles uno por otro, es el mismo que el del menor y el resto, por defecto ó por exceso, de la división de ambos.—Investigación del *m. c. d.* de dos números.—Propiedades del *m. c. d.* de dos números.—Teorema 1.º: Todo número que divida á dos, dividirá su *m. c. d.*—Teorema 2.º: Si se multiplican ó dividen dos números por un tercero, su *m. c. d.* quedará multiplicado ó dividido por dicho tercer número.—Corolario: Si se dividen dos números por su *m. c. d.*, los cocientes son primos entre sí.—Recíprocamente.—Teorema 3.º: Si un número divide á un producto de dos factores y es primo con uno, divide al otro.—Corolario: El *m. c. d.* de dos números no se altera aun cuando se multiplique ó divida uno de ellos por un factor primo con el otro.—Escolio: Simplificación de la operación. (Párrafos 84 al 88.)

ANUALIDADES.—Definición.—Problema de amortización: Determinar el valor de la anualidad destinada á extinguir en *n* años el préstamo *c* y sus intereses acumulados en el mismo tiempo.—Problema de capitalización: Calcular la anualidad que hay que imponer durante *n* años sucesivos para poder retirar, cuando terminen, el capital *c*. (Párrafos 289 al 292.)

Ejemplo: Hallar la anualidad que hay que pagar para extinguir en cuatro años un préstamo de 3.000 pesetas al 2 por 100.

RENTAS VITALICIAS. — Definición. — Cálculo de la renta. — Vida probable. (Párrafos 292 al 294.)

PAPELETA 2.ª

NUMERACIÓN ESCRITA.— Notación numérica.—Representación de las colecciones de unidades de diversos órdenes.—Valores absoluto y relativo.—Representación simbólica.—Cifra cero.—Representación de las unidades de un orden cualquiera.—Lectura de un número escrito en cifras: primero, segundo y tercer caso.—Escritura en cifra de un número enunciado: primero, segundo y tercer caso.—Representación del número indeterminado. (Párrafos 14 al 23.)

ADICIÓN.—Definiciones.—Algoritmo.—Artificio aditivo.—Casos de la suma: 1.° y 2.°—Observación: Orden en que ha de sumarse.—Consecuencias: 1.ª El orden de sumandos no altera la suma; 2.ª Aumento ó disminución en un sumando; 3.ª Suma de un número y una suma; operación indicada; 4.ª Adición de varias sumas.—Prueba. (Párrafos 23 al 30.)

RAÍZ CÚBICA DE LAS FRACCIONES SIN APROXIMACIÓN FIJADA.—Reglas operativas de cada caso.—Teorema: La raíz cúbica de una fracción, cuyo denominador es cubo perfecto, se obtiene extrayendo la raíz cúbica exacta ó aproximada, en menos de una unidad, de su numerador y dividiéndola por la raíz cúbica exacta del denominador.—Corolario: Raíz cúbica de un número decimal, que tiene un número de cifras decimales múltiplo de 3.—Teorema 2.°: Para extraer la raíz cúbica de una fracción irreductible, cuyo denominador no es cubo perfecto, se convierte en otra que reuna esta condición.—Mínimo denominador cubo perfecto.—Corolario: Raíz cúbica de un número decimal, que tiene un número de cifras decimales que no sea múltiplo de 3.

EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO ENTERO Ó FRACCIONARIO CON UNA APROXIMACIÓN DADA.—Raíz cúbica con aproximación fijada.—Definición.—Procedimiento general.—Teorema: Para hallar la raíz cúbica de un número N en menos de $\frac{1}{q}$ se halla en menos de una unidad la raíz del producto Nq^3 y se divide por q.—Corolario 1.°: Para calcular la raíz cúbica de un entero en menos de una unidad decimal del orden $q.^{\text{ésimo}}$ se escriben 3 q ceros á su derecha, se extrae la raíz cúbica en menos de una unidad del número así formado, y se separan de la raíz hallada q cifras decimales. Corolario 2.°: Para obtener la raíz cúbica de una fracción ordinaria en menos de una unidad decimal del orden ené-imo, se reduce á fracción decimal, calculando 3 n cifras decimales, y se prescinde de la coma, se extrae la raíz y se separan de ella n cifras decimales.—Corolario 3.°: Para calcular la raíz cúbica de un número decimal, en menos de una unidad decimal del orden $n.^{\text{ésimo}}$ se consideran 3 n cifras decimales, prescindiendo de las del orden inferior ó agregando ceros, si no hubiera número suficiente; y se extrae después la raíz cúbica del número decimal que así resulta.—Escolio: Raíz cúbica de un número de infinitas cifras decimales, con la aproximación que se desee.—Raíz cúbica de los números implícitos.—Raíz cúbica de un producto cuyos factores son cubos perfectos.—Idem de un cociente cuyos términos son cubos perfectos.—Idem de una potencia de grado múltiplo de 3. (Párrafos 199 al 203.)

DESCUENTO.—Definiciones.—Descuento comercial y racional; fundamento del descuento.—Descuento comercial.—Descuento racional; diferencia entre ambos descuentos.—Observación. (Párrafos 283 al 287.)

Ejemplo: Se ha presentado el 15 de Junio á un banquero una letra de 5.000 pesetas, pagaderas el 1.° de Septiembre siguiente. ¿Qué cántidad tendrá que satisfacer haciendo el descuento al 4 por 100?

PAPELETA 3.ª

SUSTRACCIÓN.—Definiciones.—Algoritmos.—Artificio sustractivo.—Casos: 1.°, 2.° y 3.°—Observaciones: 1.ª Orden de la operación. 2.ª Reducción á un solo caso. 3.ª Aumento ó disminución de los términos.—Prueba de la resta y nueva prueba de la suma.

SUSTRACCIONES COMPLEJAS.—Teorema 1.°: Para restar de un número la suma de otros varios, se resta el primer sumando; del resultado se resta el segundo, y así sucesivamente hasta el último de ellos.—Teorema 2.°: Para restar de un número la diferencia indicada de otros dos, se agrega al minuendo el menor de ellos y de la suma se resta el mayor.—Teorema 3.°: Para restar de un número el resultado de una serie de sumas y restas, basta agregarle los sustraendos, restando sucesivamente del resultado cada uno de los minuendos.

SUMA Y RESTA COMBINADAS.—Teorema 1.°: Para sumar á un número la diferencia indicada de otros dos, se suma á dicho número el minuendo, y del resultado se resta el sustraendo.—Teorema 2.°: Para sumar á un número otro, expresado por una serie de sumas y restas, basta agregarle sucesivamente los sumandos, y de la suma restar en igual forma los sustraendos.—Aplicaciones: $(a + b) + (a - b)$ » $(a + b) - (a - b)$.—Escolio.

COMPLEMENTO ARITMÉTICO.—Modo de hallarle.—Aplicaciones con ejercicio. (Párrafos 30 al 42.)

PRUEBAS DE LAS OPERACIONES NUMÉRICAS POR MEDIO DE LOS RESTOS RELATIVOS Á UN MÓDULO CUALQUIERA.—Utilidad de las propiedades de los números.—Pruebas de la suma, resta, multiplicación y división.—Observación.—Módulos que deben emplearse en estas pruebas.—Aplicaciones á ejemplos empleando el módulo 9.° (Párrafos 80 al 84.)

REGLA DE ALIGACIÓN.—Definiciones.—Mezcla.—Aleación.—Lingote.—Precio y ley.—Regla de aligación.—Problema directo de las mezclas.—Conociendo las cantidades que entran en una mezcla y sus precios respectivos, determinar el precio de la mezcla.—Problema inverso: Fijado el precio de una mezcla y conocidos los de las substancias que han de formarla, hallar las cantidades que deben mezclarse.—Teorema 1.°: Las cantidades de dos substancias mezcladas son inversamente proporcionales á las diferencias entre sus precios respectivos y el precio de la mezcla.—Cuando son más de dos las substancias mezcladas, el problema es indeterminado. (Párrafos 297 al 300.)

Ejemplo: Determinar la cantidad de agua que hay que añadir á 40 litros de ácido clorhídrico, de pesetas 0,80 el litro, para reducir el precio de éste á pesetas 0,30, sabiendo que no se asigna valor alguno al agua.

PAPELETA 4.ª

MULTIPLICACIÓN.—Definición.—Algoritmo.—Consecuencias inmediatas de la definición: 1.ª Cuando uno cualquiera de los factores se iguala á la unidad.—2.ª Cuando uno de los factores se reduzca á cero.—Artificio de la multiplicación.—Casos de la multiplicación: 1.° Multiplicación de dos números de una sola cifra. 2.° Multiplicación de un número de varias cifras por otro de una sola.—Casos particulares: 1.° Multiplicación de un número cualquiera por la unidad seguida de ceros.—2.° Multiplicación de un número cualquiera por una cifra significativa, distinta de la unidad, seguida de ceros.—Caso general: Multiplicación de un número de varias cifras por otro de varias cifras.—Casos en que los factores terminan en ceros: 1.° Si el multiplicador es un número terminado en ceros.—2.° Si ambos factores terminan en ceros.—Observación: Diferencia que existe entre los papeles que desempeñan el multiplicando y el multiplicador.—Teorema: El orden de los factores no altera el producto.—Prueba de la multiplicación. (Párrafos 42 al 52.)

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE DOS NÚMEROS.—Definición y consecuencias.—Principios relativos al *m. c. m.* de dos números.—Teorema 1.°: El *m. c. m.* de dos números, es el cociente de dividir su producto por su *m. c. d.*—Corolario 1.°: El producto del *m. c. m.* de dos números por su *m. c. d.* es el producto de dichos números.—Corolario 2.°: Todos los múltiplos de dos números lo son de su *m. c. m.* Corolario 3.°: Si dos números son primos entre sí, su *m. c. m.* es su producto.—Teorema 2.°: Si se multiplican dos números por otro, su *m. c. m.* queda multiplicado por este número.—Corolario: Si dos números se dividen por un mismo factor común, su *m. c. m.* queda dividido por él. Teorema 3.°: Los cocientes de dividir el *m. c. m.* de dos números por cada uno de ellos, son primos entre sí. (Párrafos 91 al 93.)

REGLA DE CONJUNTA.—Definición y algoritmo.—Procedimiento práctico.—Teorema: Los productos ordenados de varias equivalencias que tengan homogéneos el segundo miembro de cada una y el primero de la siguiente, forman otra equivalencia, cuyo primer miembro pertenece á la primera especie y el segundo á la última.—Regla práctica. (Párrafos 301 al fin.)

Ejemplo: ¿Cuántos rublos corresponden á 2.300 pesetas, sabiendo que 5 duros equivalen á 19,05 francos, 126 francos á 5 libras esterlinas, 10 libras esterlinas á 117 florines alemanes y 46 florines á 32,50 rublos?

PAPELETA 5.ª

MULTIPLICACIÓN.—Múltiplo de un número.—Equimúltiplos.—Multiplicación cuando los factores son implícitos.—Teorema 1.°: El producto de la suma de varios números por otro, es igual á la suma de los productos de todos los sumandos por el mismo multiplicador.—Corolario: Para multiplicar un número por una suma se multiplica dicho número por cada uno de los sumandos y se suman los productos obtenidos.—Escolio: Sacar factor común.—Teorema 2.°: El producto de la diferencia de dos números por un tercero es igual á la diferencia de los productos del minuendo y el sustraendo por dicho tercer número.—Corolario: Para multiplicar un número por la diferencia de otros dos, se multiplica por el minuendo y sustraendo, y del primer producto se resta el segundo.—Escolio: Para multiplicar dos sumas entre sí, basta multiplicar los sumandos de cada una de ellas por cada uno de los de la otra, y se suman los productos obtenidos.—Producto de varios factores.—Definición.—Algoritmo.—Potencia.—Exponente.—Potencias de base 10.—Teorema 1.°: En un producto de varios factores puede invertirse el orden de éstos sin que se altere el producto.—Corolario 1.°: En un producto de varios factores puede reemplazarse cualquier número de ellos por su producto efectuado, y recíprocamente, un factor cualquiera puede substituirse por otros á cuyo producto sea igual.—Corolario 2.°: Para multiplicar un número por el producto indicado de varios factores se le multiplica sucesivamente por cada uno de ellos.—Corolario 3.°: Para multiplicar el producto indicado de varios factores por un número, basta multiplicar cualquiera de los factores por dicho número.—Escolio: Papel de los factores en los dos últimos casos.—Corolario 4.°: Para multiplicar entre sí dos ó más productos de varios factores se forma un solo producto con los factores de todos ellos.—Corolario 5.°: El producto de varias potencias de un mismo número es otra potencia de este número, indicada por un exponente igual á la suma de los exponentes de los factores. (Párrafos 52 al 55.)

Fracciones continuas.—Origen y definición de la fracción continua.—Cocientes incompletos.—Fracciones integrantes.—Reducidas.—Fracciones continuas periódicas.—Período.—Periódicas puras y mixtas.

Reducidas y cálculo de la fracción continua.—Propiedades de las reducidas.—Teorema 1.°: Los términos de una reducida cualquiera se forman multiplicando por el cociente incompleto que le corresponde los términos de la reducida anterior y sumándole los de la antepreccedente.—Corolario: Los términos de las reducidas sucesivas aumentan constantemente.—Teorema 2.°: La diferencia de dos reducidas consecutivas es igual á la unidad dividida por el producto de sus denominadores.—Corolario 1.°: Las diferencias entre dos reducidas consecutivas son cada vez menores.—Corolario 2.°: Las diversas reducidas son fracciones irreducibles.—Teorema 3.°: Las reducidas de lugar impar van aumentando y las de lugar par disminuyendo. (Párrafos 145, 146 y teoremas 1.°, 2.° y 3.° del 147.)

Interés simple.—Definición.—Renta. Tanto por ciento.—Clases de interés.—Proporcionalidad de las magnitudes relativas al interés simple.—Problemas diversos en la regla de interés simple.—Caso particular de la regla de interés simple. (Párrafos 278 al 282.)

Ejemplo: ¿Cuál es el interés que producen 19.850 pesetas impuestas al 6 por 100 durante cinco años y cuatro meses?

PAPELETA 6.ª

División.—Definición.—Algoritmo.—Artificio elemental de la división.—Número divisible por otro.—Procedimiento general.—Determinación de las unidades más elevadas del cociente.—Casos de la división: 1.° y 2.°: Comprobación de la cifra del cociente.—3.° y 4.°: Caso particular. Si el divisor termina en ceros, se prescinde de ellos y de igual número de cifras del dividendo.—Prueba de la división y nueva prueba de la multiplicación.—(Párrafos 55 al 64.)

Reducción de fracciones.—Reducir un número fraccionario á otro de denominador dado.—Definición.—Procedimiento.—Teorema 1.°: Cuando una fracción no es exactamente reducible á otra de denominador *n*, se encuentra comprendida entre dos que tienen dicho denominador y por numeradores respectivos el mayor número entero contenido en el producto de dicha fracción por *n* y el entero inmediatamente superior.—Teorema 2.°: Para que una fracción irreducible pueda transformarse exactamente en otra de denominador dado, es preciso y basta que su denominador divida al que ha de tener la fracción.—*Reducir una fracción ordinaria ó decimal á fracción continua.*—Definición.—Procedimientos.—1.°: Fracción ordinaria.—Regla.—2.°: Fracción decimal. (Párrafos 159 al 163.)

Interés.—Regla de interés compuesto. Tanto por uno.—Caso en que el tiempo no sea un número exacto de años.—(Párrafo 282.)

Ejemplo: ¿En qué se convertirán 6.000 pesetas impuestas durante tres años á interés compuesto y al 5 por 100 anual?

PAPELETA 7.ª

División.—División por exceso.—Resto por defecto y por exceso.—División de números expresados en forma implícita. Teorema 1.°: Para dividir un producto indicado por uno de sus factores, se suprime éste.—Corolario: Para dividir un producto por un número que sea divisor de uno de los factores del producto, basta dividir dicho factor por el expresado número, conservando los demás factores.—Teorema 2.°: Para dividir un número cualquiera por un producto de varios factores, se divide dicho número por uno de éstos, el cociente obtenido por el otro factor, y así sucesivamente hasta dividir por el último de ellos.—Teorema 3.°: El cociente de dos potencias de un mismo número es igual á una potencia del mismo número cuyo exponente es la diferencia de los que tienen el dividendo y el divisor.—Escolio: Caso en que dividendo y divisor sean iguales.—Dependencia mutua entre los términos de la división, del cociente y del resto.—Teorema: El cociente de dos números no varía cuando se multiplican los dos términos por el mismo número, pero el resto queda multiplicado. (Párrafos 64 al 67.)

Fracciones continuas.—Teorema 4.°: Toda reducida de lugar par es mayor que cualquiera de lugar impar.—Teorema 5.°: Una reducida cualquiera está comprendida entre dos consecutivas de las que le preceden, y se aproxima más á la segunda que á la primera.—Corolario 1.°: La fracción continua total está comprendida entre dos reducidas consecutivas cualesquiera, siendo mayor que toda reducida el orden impar y menor que toda reducida el orden par.—Corolario 2.°: Las diversas reducidas consecutivas se aproximan cada vez más al valor de la fracción continua.—Teorema 6.°: Si una fracción se aproxima más al valor de la fracción continua total que una cierta reducida, tiene sus términos, respectivamente, mayores que los de ésta.—Cálculo del valor de una fracción continua y límite de error. (Párrafos 147 al 149.)

Regla de compañía.—Definición.—Particiones proporcionales.—Descomponer una cantidad en partes proporcionales á varios números dados.—Fórmulas de la regla de compañía. (Párrafos 294 al 297.)

Ejemplo: Tres comerciantes han formado compañía, habiendo puesto el primero 12.000 pesetas por dos años, el segundo 15.000 pesetas por un año y medio, y el tercero 18.000 por nueve meses. El día de la liquidación la Sociedad representa un capital de 64.000 pesetas después de deducidos los gastos, el cual quiere repartirse entre los socios.

PAPELETA 8.ª

Divisibilidad de los números.—Principios fundamentales.—Múltiplos y divisores de un número múltiplo común y divisor común.—Resto de un número con relación á otro.—Módulo.—Números congruentes.—Consecuencias: 1.ª Dos números iguales son congruentes, con respecto á cualquier módulo.—2.ª Un número múltiplo de otro es congruente con cero respecto á este último.—3.ª Dos números múltiplos de un tercero, son congruentes respecto á este tercero.—4.ª El dividendo y resto aditivo son congruentes respecto al divisor.—Principios fundamentales de las congruencias.—Teorema 1.°: La diferencia de dos números congruentes, es un múltiplo del módulo.—Corolario.—Teorema 2.°: Si la diferencia de dos números es un múltiplo de otro, dichos números son congruentes con respecto á éste.—Corolario.—Teorema 3.°: Si se suman miembro á miembro varias congruencias respecto de un mismo módulo, resulta una nueva congruencia.—Corolario 1.°: Una congruencia no se altera sumando un mismo número á sus dos miembros.—Corolario 2.°: Una congruencia no se altera sumando á uno de sus miembros, ó á los dos, un cierto múltiplo ó múltiplos cualquiera del módulo.—Teorema 4.°: Si se multiplican miembro á miembro varias congruencias relativas á un mismo módulo, resulta otra congruencia.—Corolario.—Una congruencia subsiste si se multiplican sus dos miembros por un mismo número. (Párrafos 67 al 71.)

Fracciones decimales.—Numeración y propiedades.—Definición.—Unidades decimales de distintos órdenes.—Representación entera del número decimal.—Lectura de un número decimal escrito en forma entera.—Escritura en forma entera de un número decimal enunciado. Propiedades de los números decimales.—Teorema 1.°: El valor de un número decimal no se altera cuando se escriben ceros á su derecha.—Teorema 2.°: Si la coma se corre hacia la derecha ó hacia la izquierda, uno, dos, tres, etc., lugares, el número queda, respectivamente, multiplicado ó dividido por la unidad seguida de uno, dos, tres, etc., ceros.—*Adición.*—Procedimiento aditivo.—*Substracción.*—Manera de operar.—*Multiplicación.*—Casos diversos.—1.° Multiplicar un número decimal por un entero.—2.° Un número decimal por otro decimal.—*División.*—Casos diversos.—1.° Dividir un decimal por un entero.—2.° Dividir un número entero ó decimal por otro decimal. (Párrafos 149 al 159.)

Regla de tres simple y compuesta.—Dependencia de una magnitud de otras varias.—Cuestiones relativas á las magnitudes proporcionales 1.ª y 2.ª—Regla de tres simple y directa.—Idem inversa. Regla de tres compuesta.—Forma numérica y propiedades de la proporcionalidad de varias magnitudes.—Método de reducción á la unidad. (Párrafos 271 al 277.)

Ejemplo: En 85 horas han construído 29 obreros un muro de 15 metros de longitud, 3,50 metros de altura y 0,64 metros de espesor. ¿Cuánto tiempo será necesario para que 53 obreros construyan otro muro de 18 metros de largo, 3 de altura, 1,20 metros de espesor?

PAPELETA 9.ª

Divisibilidad de los números.—*Teoremas relativos á los restos.*—Teorema 1.°: El resto de una suma es el mismo que el de la suma de los restos aditivos de los sumandos.—Corolario 1.°: Condición necesaria y suficiente para que un número divida á la suma de varios.—Corolario 2.°: Si un número divide á varios, divide á su suma.—Corolario 3.°: Si un número divide á otros, divide á sus multiplos.—Teorema 2.°: La condición necesaria y suficiente para que sea cero el resto de una diferencia con respecto á cualquier módulo, es que sean iguales los restos aditivos ó substractivos del minuendo y del sustraendo.—Corolario 1.°: Si un número divide á dos, divide á su diferencia.—Corolario 2.°: Si un número divide á dividendo y divisor, divide al resto.—Corolario 3.°: Si se dividen dividendo y divisor de una división inexacta por un número, el cociente no varía, pero el resto queda dividido por dicho número.—Teorema 3.°: El resto aditivo ó sustractivo de un producto con relación á cualquier módulo, es el mismo que el del producto de los restos aditivos de los factores.—Corolario.—Condición necesaria y suficiente para que un número divida á un producto. (Párrafo 71.)

Reducción de fracción ordinaria á decimal. — Definición.—Procedimiento. Teorema 1.°: Para expresar una fracción ordinaria en decimales, con un error menor que una unidad de orden $p^{\text{ésimo}}$ se agregan p ceros á su numerador, se divide el resultado por el denominador, y de la derecha del cociente se separan p cifras decimales.—Escolio: Cuando no se fije el número de cifras decimales.—Teorema 2.°: La condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria irreducible se reduzca exactamente á decimal, es que su denominador no contenga más factores primos que el 2 y el 5.—Teorema 3.°: Cuando una fracción ordinaria irreducible contiene en el denominador factores primos distintos del 2 y el 5, da origen á una decimal indefinida. Teorema 4.°: Si el denominador de una fracción ordinaria irreducible no contiene más que factores 2 y 5, la decimal á que se reduce exactamente, consta de tantas cifras decimales como unidades tenga el mayor de los exponentes de dichos factores.—Fracciones decimales periódicas. — Definiciones. — Teorema 1.°: Cuando una fracción no es exactamente reducible á decimales, da origen á una fracción periódica.—Número de cifras del período.—Teorema 2.°: Toda fracción ordinaria irreducible, cuyo denominador es primo con 10, se reduce á decimal periódica pura.—Teorema 3.°: Cuando el numerador de una fracción ordinaria cuyo denominador es primo con 10 no termina en cero, la última cifra de la parte entera de la decimal equivalente no puede ser igual á la última del período. Teorema 4.°: Toda fracción irreducible cuyo denominador no es primo con 10, conteniendo factores primos distintos de 2 y 5, da origen á una decimal periódica mixta, en la que el número de cifras no periódicas es igual al mayor exponente de los factores 2 y 5 de su denominador.

Reducción de una fracción decimal á ordinaria.—Definición.—Procedimiento.—Teorema 1.°: Para reducir una fracción decimal de número limitado de cifras á fracción ordinaria, se prescinde de la coma y se pone por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales contiene.—Escolio: Cuando la fracción tenga parte entera.—Teorema 2.°: La fracción ordinaria generatriz de una decimal periódica pura, sin parte entera, tiene por numerador el período y por denominador un número formado de tantos nueves como cifras tiene el período.—Escolio: Cuando la fracción propuesta tenga parte entera.—Teorema 3.°: La fracción ordinaria generatriz de una decimal periódica mixta, sin parte entera, tiene por numerador la parte no periódica seguida del período, disminuído en la parte no periódica, y por denominador, un número formado de tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras hay en la parte no periódica.—Escolio: Cuando la fracción propuesta tenga parte entera. Caso de imposibilidad y solución aproximada.—Noción de la cantidad inconmensurable. (Párrafos 163 al 170).

Regla de aligación.—Definición de mezcla: aleación, lingote, precio y ley, regla de aligación.—Problema directo de las aleaciones.—Conociendo los pesos de los metales que entran en una aleación y sus leyes respectivas, determinar la ley de la aleación.—Problema inverso.—Fijada la ley de una aleación y conocidas las leyes de los metales que han de formarla, hallar los pesos de los que deben alearse.—Caso 1.°—Teorema: Los pesos de dos metales aleados son inversamente proporcionales á las diferencias entre sus leyes respectivas y la ley de la aleación.—El problema es indeterminado; puede ser determinado cuando se conoce la suma ó la diferencia de los pesos de los metales aleados.—Caso 2.°—Cuando son más de dos los metales aleados, aumenta la indeterminación del problema; solución que tiene. (Párrafos 297 y 300).

Ejemplo: ¿Qué cantidad de plata hay que alear con 300 gramos de una pasta cuya ley es 0,805, para elevarla á 0,900?

PAPELETA 10.ª

Caracteres generales de divisibilidad.—Procedimiento de investigación.—Determinación y reproducción de los restos de las unidades sucesivas.—Forma de la unidad de un orden cualquiera.—Forma de una colección de unidades.—Forma de un número cualquiera.—Condición general de la divisibilidad.—Aplicaciones á los módulos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11.—Tabla de restos. (Párrafos 72 al 80).

Potencias en general.—Definiciones. Potencia, grado, base.—Potencia perfecta.—Potencia de un número cualquiera de la unidad; de la unidad seguida de ceros.—Teorema 1.°: La potencia de un cierto grado de una fracción es otra fracción cuyos términos son las potencias del mismo grado del numerador y denominador.—Corolario 1.°: Las potencias de una fracción irreducible son fracciones irreducibles.—Corolario 2.°: Si un número entero no es potencia perfecta de otro entero, tampoco lo es de una fracción.—Teorema 2.°: Para elevar un número decimal á una potencia m^{esima}, se eleva como si fuera entero y después se separan m veces el número de cifras decimales que tiene el número.—Potencias de base implícita.—Teorema 1.°: La potencia de un producto es el producto de las potencias del mismo grado de cada uno de los factores.—Teorema 2.°: La potencia de un cociente es el cociente de las potencias de igual grado del dividendo y divisor.—Teorema 3.°: Para elevar una potencia á otra potencia se multiplican los exponentes.—Condiciones generales de potencialidad. — Teorema 1.°: Para ser potencia perfecta del grado m es preciso y basta que los exponentes de los factores primos sean múltiplos de m. Corolario: Si un número es potencia de grado par, el número de sus divisores es impar.—Teorema 2.°: Para que una fracción irreducible sea potencia perfecta del grado m, es preciso y basta que lo sea cada uno de sus términos.—Potencias de expresiones de relación.—Teorema 1.°: Si dos números son congruentes, sus potencias del mismo grado lo son.—Corolario: El resto que da la potencia de un número al dividirla por un módulo es el mismo que da la potencia de igual grado de su resto aditivo, con respecto á dicho módulo.—Teorema 2.°: Si cuatro números forman igualdad fraccionaria, sus potencias de igual grado forman otra igualdad fraccionaria.

Cuadrado de un número.—Definición. Teoremas referentes al cuadrado.—Teorema 1.°: El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más doble producto del primero por el segundo.—Corolario: Cuadrado de la diferencia.—Cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades.—Teorema 2.°: La suma de dos números, multiplicada por su diferencia, es la diferencia de cuadrados.—Corolario: La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual al doble del menor, más la unidad.—Caracteres de exclusión.—Número entero.—Teorema 1.°: Todo número que termine en 2, 3, 7, 8 ó en número impar de ceros, no puede ser cuadrado perfecto.—Teorema 2.°: Todo número que termine en 5, si no es 2 la cifra de las decenas, y par la de las centenas, no puede ser cuadrado perfecto.—Teorema 3.°: Todo número divisible por una potencia impar de un factor primo, no puede ser cuadrado perfecto si no es divisible por la potencia siguiente del mismo factor.—Teorema 4.°: Todo número impar que disminuído en una unidad no sea múltiplo de 8, no puede ser cuadrado perfecto.—Número fraccionario.—Teorema: Para que una fracción sea cuadrado perfecto, es preciso y basta que lo sea el producto de sus términos.—Corolario: Si uno de los términos es cuadrado perfecto, es preciso y basta para que lo sea la fracción, que el otro término lo sea.—Número decimal.—Teorema: Para que un número decimal, compuesto de un número par de cifras decimales, sea cuadrado perfecto, es preciso y basta que lo sea considerado como entero.—Corolario: Si tiene un número impar de cifras decimales, no puede ser cuadrado perfecto. (Párrafos 170 al 178.)

Regla de conjunta.—Definición y algoritmo.—Procedimiento práctico.—Teorema: Los productos ordenados de varias equivalencias que tengan homogéneos el segundo miembro de cada una y el primero de la siguiente, forman otra equivalencia cuyo primer miembro pertenece á la primera especie y el segundo á la última.—Regla práctica. (Párrafos 301 al fin.)

Ejemplo: Arbitrar el medio más ventajoso para remitir 50.000 pesetas de Madrid á Londres, sabiendo que el cambio directo es de 33 pesetas, 35 por libra esterlina; el de Madrid con París, 32,40 por ciento beneficio, oro francés; el de París con Amsterdam, 190 florines holandeses por 214 francos, y el de Amsterdam sobre Londres, 10 libras por 116 florines.

PAPELETA 11.ª

Números primos. — Definición. — Primos absolutos y primos entre sí.—Primeras proposiciones.—Teorema 1.°: Todo número primo que no divide á otro, es primo con él.—Teorema 2.°: Todo número que no es primo tiene un divisor primo.—Corolario: Si varios números no son primos entre sí, tienen un divisor común primo.—Teorema 3.°: La serie de los números primos es ilimitada.—Formación de una tabla de números primos. Teorema 1.°: Si en la serie natural de los números se parte de un número n y se tachan los que se encuentran de n en n, desaparecen los múltiplos de n. Teorema 2.°: Si hemos tachado en la serie natural de los números los múltiplos de los números primos 2, 3, 5... p y es q el primero sin tachar después de p, q será el número primo inmediatamente superior á p y todos los inferiores á q^2 sin tachar son primos.—Regla para formar una tabla de números primos.—Corolario: Un número es primo cuando no es divisible por ninguno de los números primos cuyos cuadrados no sean mayores que él. Escolio. (Párrafos 96 al 99.)

POTENCIAS.—Cubo de un número.—Definición.—Teoremas relativos al cubo.—Teorema 1.°: El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.—Cubo de una diferencia.—Corolario 1.°: Cubo de un número compuesto de decenas y unidades.—Corolario 2.°: La diferencia de los cubos de dos números consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo de este menor, más una unidad.—Caracteres de exclusión.—Número entero.—Teorema 1.°: Todo número que termine en ceros no podrá ser cubo perfecto, si el número de ceros no es múltiplo de tres. Teorema 2.°: Todo número que no sea múltiplo de 9 ó que aumentado ó disminuído en una unidad no sea múltiplo de este factor, no puede ser cubo perfecto.—Teorema 3.°: Todo número que es divisible por un factor primo, no puede ser cubo perfecto si no es también divisible por el cubo de dicho factor.—Número fraccionario.—Teorema 4.°: Para que una fracción sea cubo perfecto, es preciso y basta que lo sea el producto del numerador por el cuadrado del denominador.—Corolario: Si uno de los términos es cubo perfecto, basta para que lo sea la fracción que lo sea el otro.—Número decimal.—Teorema 5.°: Para que sea cubo perfecto un número decimal que tenga un número de cifras decimales múltiplo de tres, es preciso y basta que lo sea considerado como entero.—Corolario: Si un número decimal tiene un número de cifras decimales que no sea múltiplo de tres, no puede ser cubo perfecto. (Párrafos 178 al 181.)

FONDOS PÚBLICOS.—Definiciones.—Valor nominal.—Valor efectivo.—Cambio de emisión.—Renta á la par.—Tanto por ciento nominal.—Deuda amortizable.—Idem perpetua.—Problemas relativos á fondos públicos.—1.°: Hallar el tanto por ciento de efectivo que produce un capital empleado en una renta, cuyo cambio corriente y tanto por ciento nominal se conoce. 2.°: Qué cantidad debe invertirse en efectos públicos cuyo tanto por ciento nominal y cambio son conocidos, para obtener cierta renta.—3.°: Hallar la renta que produce un capital empleado en títulos, cuyo cambio y tanto por ciento nominal se conocen.—4.°: ¿Qué capital nominal puede adquirirse con un efectivo, conocido el cambio corriente?—Calcular el valor efectivo de un cierto capital nominal, conociendo el cambio de cotización. (Párrafos 287 al 289.)

Ejemplo: ¿Qué cantidad se necesita emplear para obtener 3.000 pesetas de renta en 4 por 100 perpetuo, [illegible] 77,20 por 100 el cambio corriente?

PAPELETA 12.ª

TEOREMAS REFERENTES Á LOS NÚMEROS PRIMOS.—Nuev[illegible].—Teorema 1.°: Todo número primo que divide á un producto de varios factores, divide, por lo menos, á uno de ellos.—Corolario 1.°: Todo número primo que divide á una potencia, divide á la base.—Corolario 2.°: Si dos números son primos entre sí, sus potencias también lo son.—Teorema 2.°: Todo número primo con los factores de un producto, es primo con éste y recíprocamente.—Corolario: Todo número que divide á un producto y es primo con todos los factores menos con uno, divide á éste.—Teorema 3.°: Si varios números primos entre sí, dos á dos, dividen separadamente á un número, su producto también le divide.—Corolario: El $m.\ c.\ m.$ de varios números primos entre sí, dos á dos, es su producto.—Escolio.—Caracteres de divisibilidad.—Cuando un número es un producto de varios factores primos entre sí.

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS. Posibilidad de efectuarla. — Teorema: Todo número compuesto es el producto de cierto número de factores primos.—Forma de un número con relación á sus factores primos.—Investigación de los factores primos de un número. Teorema: No existe más que un solo sistema de factores primos cuyo producto sea igual á un cierto número. — Observación. — Abreviación de la descomposición. (Párrafos 99 al 104.)

RAÍZ CUADRADA.—Preliminares.—Definición y algoritmo.—Condiciones á que debe satisfacer la extracción.—Extracción de la raíz cuadrada en menos de una unidad.—Definiciones: Raíz por defecto; raíz por exceso; resto; raíz entera.—Raíz cuadrada de un número entero.—Caso 1.°: número menor que 100. — 2.°: Número mayor que 100.—Teorema 1.°: La raíz cuadrada entera del número de las centenas de un número es exactamente el número de las decenas de su raíz.—Teorema 2.°: Si de un número se resta el cuadrado de las decenas de la raíz cuadrada y se divide el número de las decenas del residuo así obtenido por el doble del número de las decenas de la raíz, resulta la cifra de las unidades ó un cociente mayor.—Comprobación de la cifra obtenida para las unidades de la raíz.—Regla práctica.—Proposiciones relativas al resto.—Teorema 1.°: El resto que se obtiene al extraer por defecto en menos de una unidad la raíz cuadrada de un número entero no puede exceder al doble de dicha raíz.—Teorema 2.°: Si el último resto es igual ó menor que la raíz hallada, ésta difiere por defecto de la verdadera en menos de media unidad, y si fuere mayor el número inmediatamente superior á la raíz hallada, será la raíz por exceso con igual límite de error. Prueba de la extracción.—Raíz cuadrada de un número fraccionario.—Teorema: La raíz cuadrada de una fracción, es la raíz cuadrada, en menos de una unidad de su parte entera. (Párrafos 181 al 188.)

INTERÉS.—Regla de interés compuesto. Tanto por uno.—Caso en que el tiempo no sea un número exacto de años. (Párrafo 282.)

Ejemplo: ¿Qué cantidad debo imponer se durante cuatro años á interés compuesto y al 4 por 100 anual, para percibir al fin de este plazo 9.325 pesetas?

PAPELETA 13.ª

INVESTIGACIÓN DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO.—Divisibilidad por descomposición.—Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un número divida á otro, es que no contenga factores primos distintos de este otro, ni los contenga con mayores exponentes.—Formación de los divisores.—Teorema: Escribiendo en diversas líneas la unidad y las diversas potencias de los factores primos de un número desde la primera hasta la que contiene este número, y multiplicando entre sí los diversos términos de dichas líneas, como si fuesen sumandos de varias sumas, los términos del producto serán los divisores del número.—Corolario: El número de divisores de un número, es el producto de los exponentes de sus factores primos, aumentados en una unidad.—Determinación en factores primos del $m.\ c.\ d.$ y del $m.\ c.\ m.$—Teorema 1.°: El $m.\ c.\ d.$ de varios números, es el producto de sus factores primos comunes afectados del menor exponente.—Teorema 2.°: El $m.\ c.\ m.$ de varios números, es el producto de todos los factores primos, afectados del mayor exponente. (Párrafos 104 al 107.)

RAÍZ CÚBICA.—Preliminares.—Difiniciones y algoritmo.—Condiciones á que debe satisfacer la extracción.—Raíz cúbica de un número entero ó fraccionario en menos de una unidad.—Definiciones: Resto; Parte entera de la raíz.—Raíz cúbica de un número entero.—Primer caso: Número menor que 1.000.—Segundo: Número mayor que 1.000.—Teorema 1.°: La raíz cúbica entera de los millares del número, es exactamente la cifra de las decenas de la raíz.—Teorema 2.°: Si del número se resta el cubo de las decenas de la raíz y se divide el número de las centenas del residuo así obtenido por el triplo del cuadrado del número de las decenas de la raíz, resulta la cifra de las unidades ó un cociente mayor.—Comprobación de la cifra obtenida para las unidades de la raíz.—Deducción de la regla para extraer la raíz cúbica.—Regla práctica. (Párrafos 192 al 196.)

FONDOS PÚBLICOS.—Definiciones.—Valor nominal.—Valor efectivo.—Cambio corriente.—Cambio de emisión.—Renta á la par.—Tanto por ciento nominal.—Deuda amortizable.—Deuda perpetua.—Poblemas relativos á fondos públicos.—Primero: Hallar el tanto por ciento efectivo que produce un capital empleado en una renta, cuyo cambio corriente y tanto por ciento nominal se conocen.—Segundo: ¿Qué cantidad debe invertirse en efectos públicos, cuyo tanto por ciento nominal y cambios son conocidos para obtener cierta renta?—Tercero: Hallar la renta que produce un capital empleado en títulos, cuyo cambio y tanto por ciento nominal se conocen.—Cuarto: ¿Qué capital nominal puede adquirirse con uno efectivo, conocido el cambio corriente?—Quinto: Calcular el valor efectivo de un cierto capital nominal, conociendo el cambio de cotización. (Párrafos 287 al 289.)

Ejemplo: ¿Cuál es el importe de la venta de 58.000 pesetas nominales de cédulas hipotecarias al cambio de 113,25 por 100?

PAPELETA 14.ª

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES ORDINARIAS.—Magnitud.—Continua y discreta.—Múltiplo y parte alícuota.—Terminaciones avo y ésima.—Unidad ó módulo.—Fracción. — Unidad fraccionaria.—Medición de las magnitudes. — Cantidad.—Términos de la fracción.—Fracciones ordinarias.—Nomenclatura y escritura de la fracción.—Fracciones inversas.—Expresiones fraccionarias.—Número mixto. Transformación de fracciones.—Teorema 1.°: Si el numerador de una fracción se hace m veces mayor ó menor, la fracción se hace m veces mayor ó menor.—Teorema 2.°: Si el denominador se hace m veces mayor ó menor, la fracción se hace

m veces menor ó mayor.—Teorema 3.°: El valor de una fracción no se altera multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número.—Reducción á un común denominador.—Regla.—Transformación de la fracción mayor que la unidad.—Condición necesaria y suficiente para que una fracción sea igual á un número entero.—Convertir un número mixto en fracción.—Simplificación de fracciones.—Fracción irreducible.—Teorema 1.°: Si una fracción tiene sus términos primos entre sí, cualquiera que le sea igual, tiene sus términos equimúltiplos de los de la primera.—Corolario: Una fracción cuyos términos son primos entre sí es irreducible.—Recíproca.—Regla para reducir una fracción á su más simple expresión.—Aplicación á una fracción cuyo numerador sea múltiplo del denominador.—Corolario 1.°: Multiplicando los dos términos de una fracción irreducible, por la serie natural de los números, se hallan todas sus equivalentes.—Corolario 2.°: Dos fracciones irreducibles iguales, son idénticas.—Reducción de fracciones al mínimo común denominador.—Regla.—Escolio. (Párrafos 107 al 121.)

Raíz cúbica.—Proposición relativa al resto.—Teorema: El resto de la raíz cúbica por defecto en menos de media unidad no puede exceder del triplo cuadrado de la raíz, más el triplo de dicha raíz. Prueba de la extracción.—Raiz cúbica de un número fraccionario.—Teorema: La raíz cúbica en menos de una unidad, de una fracción, es la raíz cúbica del número de unidades que contiene. (Párrafos 196 al 199.)

Razones y proporciones.—Definiciones.—Símbolo y expresión de la relación. Teorema: La relación de dos magnitudes de la misma especie, está expresada por el cociente de los números que la miden, tomando una tercera por unidad.—Proporcionalidad.—Algoritmo.—Modo de reconocer la proporcionalidad.—Teorema 1.°: Cuando dos magnitudes son proporcionales, si se multiplica un valor particular de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda multiplicado por el mismo número.—Recíprocamente.—Teorema 2.°: Cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales, al multiplicar un valor de una de ellas por un número, el correspondiente de la otra queda dividido por el mismo número.—Recíprocamente.—Forma numérica de la proporcionalidad de dos magnitudes.—Relación de sus valores numéricos. (Párrafos 265 al 271.)

Ejemplo: La guarnición de una ciudadela se compone de 1.800 hombres, y tiene víveres para tres meses, siendo la ración de cinco hectogramos diarios. Se aumenta dicha guarnición en 300 hombres, y se quiere que los víveres duren cuatro meses, ¿á cuánto debe reducirse la ración?

PAPELETA 15.ª

Alteración de fracciones.—Teorema 1.°: Si se suman término á término dos fracciones desiguales, la fracción resultante está comprendida entre ambas. Corolario: Si se suman término á término varias fracciones desiguales, la fracción resultante está comprendida entre la mayor y la menor.—Teorema 2.°: Si añadimos un mismo número á los dos términos de una fracción, la resultante se aproxima á la unidad.—Escolio.—Corolario: Si de los dos términos de una fracción se resta un mismo número, la fracción resultante se aleja de la unidad. Adición de fracciones.—Definición.—Casos elementales de adición.—Primero: Sumar fraciones que tengan el mismo denominador.—Segundo: Sumar fracciones de distinto denominador.—Tercero. Sumar un entero y una fracción.—Adición.—Adición de fracciones implícitas. Escolio: Otro procedimiento.—Substracción: Definición.—Casos elementales de la substracción.—Primero: Restar dos fracciones de igual denominador.—Segundo: Restar dos fracciones cualesquiera.—Tercero: Restar de un entero una fracción.—Escolio: Cuarto: Restar un entero de una fracción impropia.—Substracción de fracciones implícitas.—Escolio.—(Párrafos 121 al 128.)

Números inconmensurables.—Teoría de los límites.—Definición.—Consecuencias: Límite de una variable, expresión de una variable.—Ejemplo notable de límite.—Proposiciones relativas á los límites. Teorema 1.°: Dos cantidades variables que permanecen constantemente iguales, tienen el mismo límite.—Teorema 2.°: Si dos cantidades constantes están comprendidas entre dos variables cuya diferencia pueda ser tan pequeña como se quiera, dichas constantes son iguales.- Teorema 3.°: El límite de la suma de varias variables, es la suma de sus límites.—Escolio: El número de sumandos ha de ser limitado.—Corolario: El límite de la diferencia de dos cantidades variables es la diferencia de sus límites.—Teorema 4.°: El límite del producto de varios factores variables es el producto de los límites.—El número de factores ha de ser limitado.—Corolario 1.°: El límite de la potencia de una cantidad variable es la potencia de igual grado del límite de dicha variable.—Corolario 2.°: El límite del cociente de dos variables es el cociente de los límites.—Corolario 3.°: El límite de la raíz cuadrada ó de la cúbica de una variable es la raíz del mismo grado del límite de la variable.—Escolio general: El límite del resultado de una operación cualquiera es el de la misma operación efectuada con los límites. (Párrafos 203 al 206.)

Descuento.—Definiciones: Descuento comercial y racional; Fundamento del descuento.—Descuento comercial.—Descuento racional.—Diferencia entre ambos descuentos. (Párrafos 283 al 237.)

Ejemplo: El descuento al 5 por 100 de una letra de 4.500 pesetas fué el de 35,50 pesetas. ¿Qué tiempo falta para el vencimiento de la letra?

PAPELETA 16.ª

Fracciones ordinarias.—Multiplicación.—Definición.—Consecuencias; no implica siempre aumento; medida de la magnitud.—Casos elementales de la multiplicación:

$$1.^{\circ}\ \frac{a}{m} \times p;\ 2.^{\circ}\ m \times \frac{p}{q};\ 3.^{\circ}\ \frac{m}{n} \times \frac{p}{q}.$$

Producto de varios factores.—Multiplicación de fracciones implícitas

$$(a + b + c, m;\ m = \frac{1}{p};\ m = \frac{p}{q};$$

$$(a - b) \times \frac{p}{q}.$$

Inversos de los anteriores; multiplicación de números mixtos.—Escolio: Fracciones de fracción, fracciones múltiples, fracción de la unidad á que equivalen. (Párrafos 128 al 133.)

Números concretos.—Nociones preliminares.—Definiciones.—Magnitudes que se someten al cálculo.—Múltiplos y submúltiplos del módulo ó unidad.—Denominación genérica de los módulos.—Sistema de pesas y medidas y monetario.—Condiciones á que han de satisfacer todos los sistemas de pesas, medidas y monetario.—Sistema métrico decimal.—Legalidad de la adopción.—Unidad fundamental y unidades principales.—Unidades longitudinales, superficiales, de volumen, de capacidad, ponderales.—Observación.—Relación entre las unidades y sus múltiplos y submúltiplos.—Sistema monetario.—Monedas efectivas ó imaginarias, de cuenta y cambio, ley ó título, talla ó pie, permisos.—Unidades de tiempo.—Unidades angulares. (Párrafos 237 al 248.)

Anualidades.—Definición.—Problema de amortización: Determinar el valor de la anualidad destinada á extinguir en n años el préstamo c y sus intereses acumulados en el mismo tiempo.—Problema de capitalización: Calcular la anualidad que hay que imponer durante n años sucesivos para poder retirar cuando terminan el capital c.—Rentas vitalicias.—Definición.—Cálculo de la renta.—Vida probable. (Párrafos 289 al 294.)

Ejemplo: Se quiere crear un capital de 1.500 pesetas para librar de quintas á un individuo que tiene dieciséis años. ¿Cuánto debe imponerse cada año sabiendo que entra en quintas á los veintiuno y que el interés es el 5 por 100?

PAPELETA 17.ª

Fracciones ordinarias.—División.—Definición.—Cociente completo de dos números enteros.—Casos elementales de división. 1.° $\frac{a}{b} : m$; 2.° $A : \frac{m}{n}$. División en forma implícita.—Fracciones complejas. Extensión de la notación fraccionaria.—Generalidades de ciertas proposiciones. Principios fundamentales.—Teorema 1.°: Si se multiplica ó divide el numerador de una fracción completa por un cierto número, la fracción queda multiplicada ó dividida por dicho número.—Teorema 2.°: Si se multipla ó divide el denominador de una fracción compleja por un cierto número, la fracción queda dividida ó multiplicada por dicho número.—Teorema 3.°: Una fracción compleja no se altera si se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número. Operaciones: suma, resta, multiplicación y división.—Escolio.—Cómo pueden deducirse la resta y división. (Párrafos 133 al 143).

Transformación de los números concretos en el sistema métrico.—Definiciones.—Número complejo é incomplejo; homogéneo y heterogéneo.—Reglas de transformación.—1.ª Incomplejo en otro incomplejo de orden inferior ó superior. 2.ª Complejo en incomplejo de orden inferior.—3.ª Complejo en incomplejo de un orden cualquiera.—4.ª Incomplejo en complejo de órdenes inferiores.—5.ª Incomplejo en complejo de órdenes superiores. (Párrafo 262.)

Regla de tres simple y compuesta.—Dependencia de una magnitud de otras varias.—Cuestionos relativas á las magnitudes proporcionales.—Regla de tres simple y directa.—Idem inversa.—Regla de tres compuesta.—Forma numérica y propiedades de la proporcionalidad de varias magnitudes. (Párrafos 271 al 277.)

Ejemplo: Con una velocidad de 9,35 m. por segundo, recorre una locomotora un cierto espacio en veintiocho minutos cuarenta segundos. ¿Qué velocidad deberá tener para salvar la misma distancia en veinte minutos?

PAPELETA 18.ª

IGUALDADES FRACCIONARIAS. — Definición.—Extremos, medios.—Teorema 1.º: Productos de extremos igual al de medios. Recíproca.—Corolario 1.º: Un extremo es igual al producto de medios, dividido por el otro extremo.—Corolario 2.º: Pueden efectuarse con los términos de una igualdad fraccionaria todas las transformaciones que no alteren la igualdad de los productos de extremos y medios.—Teorema 2.º: En toda igualdad fraccionaria, la suma ó diferencia de los numeradores, partidas, respectivamente, por la suma ó diferencia de los denominadores, forma una fracción igual á cualquiera de las propuestas.—Corolario 1.º: En toda igualdad fraccionaria, la suma de numeradores partida por su diferencia, es igudl á la suma de denominadores partida por su diferencia.—Corolario 2.º: La suma de numeradores partida por la de denominadores en una serie de igualdades fraccionarias forma una fracción igual á cada una de ellas.—Escolio.—Teorema 3.º: La suma ó diferencia de los dos primeros términos, dividida respectivamente por la suma ó diferencia de los otros dos, es igual al primero partido por el tercero, ó al segundo partido por el cuarto.—Corolario: La suma de los dos primeros términos partida por su diferencia, es igual á la suma de los otros dos, dividida por su diferencia.—Teorema 4.º: Cuando los numeradores ó denominadores son iguales, los demás términos forman una igual dad fraccionaria.—Teorema 5.º: Si se multiplican término á término varias igualdades fraccionarias, los productos forman otra igualdad fraccionaria.—Teorema 6.º: Si se dividen término á término dos igualdades fraccionarias, los cocientes forman otra igualdad fraccionaria. (Párrafos 143 al 145.)

REGLAS PARA OPERAR CON LOS NÚMEROS CONCRETOS EN EL SISTEMA MÉTRICO.—Adición, regla.—Substracción, regla.—Multiplicación.—Definición.—Cuestión práctica que resuelve esta operación: Conocido un número concreto que expresa la equivalencia de una cierta unidad concreta, obtener el que corresponde á otro número concreto de la misma especie que esa unidad; regla práctica.—División.—Definición.—Cuestiones que pueden conducir á una división de concretos: 1.ª Conocido un número concreto, equivalente á una cierta unidad, hallar la equivalencia de otro concreto de la misma especie que el primero.—Regla. — 2.ª Conocido un número concreto, al cual equivale otro segundo, también concreto, y de cualquier especie, hallar la equivalencia de una unidad de la especie del primero de estos números.—Regla. (Párrafo 263.)

INTERÉS SIMPLE.—Definición. — Renta. Tanto por ciento.—Clases de interés.—Proporcionalidad de las magnitudes relativas al interés simple.—Problemas diversos en la regla de interés simple.—Caso particular de la regla de interés simple. (Párrafos 278 al 282.)

Ejemplo: ¿Qué interés producirá en dos años y un mes la cantidad de 18.000 pesetas impuestas al 5,5 por 100?

PAPELETA 19.ª

RAÍZ CUADRADA DE LAS FRACCIONES SIN APROXIMACIÓN FIJA.—Reglas operativas en cada caso.—Teorema 1.º: Para extraer la raíz cuadrada de una fracción cuyo denominador es cuadrado perfecto, se extrae la de su numerador exacta ó aproximadamente y se divide por la del denominador.—Corolario: Para estraer la raíz cuadrada de un número decimal compuesto de un número par de cifras decimales, se opera como si fuera entero, y de la raíz cuadrada se separa la mitad del número de cifras decimales.—Teorema 2.º: La raíz cuadrada de una fracción irreducible cuyo denominador no es cuadrado perfecto, se extrae convirtiéndola en otra que cumpla esta condición.—Corolario: Para extraer la raíz cuadrada de un número decimal compuesto de un número impar de cifras decimales, se le agrega un cero y se opera como en el caso en que dicho número es par.

EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO ENTERO Ó FRACCIONARIO CON UNA APROXIMACIÓN DADA.—Raíz cuadrada con aproximación fijada.—Definición.—Procedimiento general. — Teorema: La raíz de un número N en menos de $\frac{1}{q}$ se encuentra extrayendo la raíz en menos de una unidad del producto Nq^2 y dividiéndolo por q.—Corolario 1.º: La raíz cuadrada de un número entero con un error menor que $\frac{1}{10^q}$ se halla escribiendo $2\,q$ ceros á su derecha y separando de la raíz cuadrada del número así formado, q cifras decimales.—Corolario 2.º: La raíz cuadrada de una fración ordinaria en menos de $\frac{1}{10^q}$ se obtiene reduciendo la fracción á decimales con $2\,q$ cifras decimales, prescindiendo de la coma, y en la raíz del número así formado, separamos el número de cifras decimales pedidas.—Corolario 3.º: La raíz cuadrada de un número decimal en menos de $\frac{1}{10^n}$ se toman $2\,n$ cifras decimales, prescindiendo de las de orden inferior ó agregando ceros si no hubiera número suficiente; y se extrae después la raíz cuadrada del número decimal que así se obtiene.—Raíz cuadrada de los números implícitos.—Procedimiento general y casos particulares.—Raíz de un producto de números cuadrados perfectos.—Raíz de un cociente.—Raíz de una potencia par. (Párrafos 188 al 192.)

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS INCONMENSURABLES.—Medida de la magnitud inconmensurable. — Definición. — Qué otros números inconmensurables pueden considerarse en la Aritmética, además de los procedentes de medir la magnitud.—Concepto de las operaciones con números inconmensurables. — Suma, resta y multiplicación. (Párrafos 206 y 207, hasta la división.)

NÚMEROS CONCRETOS.—Problemas que se resuelven por la correlación de unidades métricas.—1.º Pasar de capacidad á volumen, y al contrario.—2.º Conocido el volumen, calcular el peso, y al contrario.—3.º Hallar el peso de un cuerpo, conocida su capacidad, y al contrario. (Párrafo 264.)

Ejemplo: Determinar las unidades de capacidad que corresponden á una cantidad de aceite de oliva que pesa 558 kg., 900 gramos, siendo 0,92 su densidad.

PAPELETA 20.ª

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS.—Principio fundamental.—Teorema: El *m. c. d.* de varios números no se altera sustituyendo dos de ellos por su *m. c. d.*—Procedimiento.—Teoremas relativos al *m. c. d.* de varios números.—Teorema 1.º: Todo divisor de varios números lo es de su *m. c. d.*—Teorema 2.º: Si se multiplican ó dividen varios números por otros, su *m. c. d.* queda multiplicado ó dividido por este otro.—Corolario: Si se dividen varios números por su *m. c. d.*, los cocientes son primos entre sí.—Recíproca.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS.—Principio fundamental.—Teorema: El *m. c. m.* de varios números no se altera si sustituímos dos de ellos por su *m. c. m.*—Procedimiento.—Teoremas relativos al *m. c. m.* de varios números.—Teorema 1.º: Todo múltiplo de varios números lo es de su *m. c. m.*—Teorema 2.º: Si se multiplican ó dividen varios números por otro, su *m. c. m.* queda multiplicado ó dividido. — Teorema 3.º: Si se divide el *m. c. m.* de varios números por cada uno de ellos, los cocientes son primos entre sí.—Recíprocamente. (Párrafos 88 al 91 y 93 al 96.)

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS INCONMENSURABLES. — División. — Potencias.—Raíces.—Generalización de las reglas del cálculo.—1.º El orden de factores no altera el producto.—2.º Para multiplicar dos fracciones de términos inconmensurables, se multiplican los numeradores, y al producto se pone por denominador el producto de denominadores.—3.º Multiplicar una suma indicada de números inconmensurables por otro inconmensurable.—4.º Toda magnitud inconmensurable es igual á la unidad, multiplicada por su medida. (Párrafos 207, desde la división, y 208.)

REGLA DE COMPAÑÍA.—Definición.—Particiones proporcionales.—Descomponer una cantidad en partes proporcionales á varios números dados.—Fórmulas de la regla de compañía. (Párrafos 294 al 297.)

Ejemplo: Repartir 72.000 pesetas entre tres personas, de manera que la segunda tenga tres veces más que la primera y la tercera dos veces más que la segunda.

Algebra.—Texto: Salinas y Benítez.

Cuarta edición (1905).

PAPELETA 1.ª

NOCIONES FUNDAMENTALES.—Definiciones y anotación simbólica.—Función.—Ley matemática. — Problema. — Dependencia entre los datos y las incógnitas.—Casos en que se obtendrá la incógnita en forma explícita.—Idem en forma implícita.—Definición del Algebra.—Concepto cuantitativo y cualitativo de las magnitudes.—Notación algebraica.—Necesidad de adoptar signos y símbolos para representar las leyes que ligan las funciones con sus variables.—Ejemplo aclaratorio. Determinar dos números tales, que el primero, aumentado en tres unidades, sea igual al duplo del segundo, y que el segundo sea igual al primero, disminuído en cinco unidades.—Signos que se emplean para expresar las operaciones y relaciones de las cantidades entre sí.—Fórmula. (Párrafos 1 al 7.)

ELEVACIÓN Á POTENCIAS.—Definición.—Algoritmo.—Potencia de un monomio.—Regla.—Fórmula de la potencia de un binomio; sus ventajas. — Procedimiento para su determinación; ley de formación de los coeficientes; su determinación sucesiva y forma general; fórmula de la potencia de un binomio. (Párrafos 64 al 66 y del 67 hasta las observaciones.)

RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES.—Preliminares.—Identidad.—Ecuación.—Raíz. Sistema de ecuaciones; solución del sistema; ecuaciones y sistemas equivalentes.—Procedimientos para plantear los problemas; partes que hay que considerar; regla para el planteo.—Ejemplo: Hallar un número tal, que, agregándole n, la suma sea p veces dicho número. (Párrafos 112 al 116.)

Ejercicio: Resolución del siguiente problema: Hallar la profundidad de un pozo de mina dejando caer una piedra en él, y contando el tiempo expresado en segundos, desde el momento de soltar la piedra, hasta el en que se percibe el sonido de su llegada al fondo. (Párrafo 162, problema 7.°)

PAPELETA 2.ª

CUALIDAD DE LA MAGNITUD.—Definición.—Cantidades positivas y negativas. Ejemplos para aclarar la diferencia que existe entre aquéllas y éstas.—Relaciones entre los valores de una magnitud.—Valores absolutos y relativos.—Efecto producido por la reunión de los números que miden dos estados, uno positivo y otro negativo, de una misma magnitud. Proposiciones que se deducen del carácter opuesto de las cantidades positivas y negativas.—1.ª Toda cantidad negativa es menor que cualquiera otra positiva.—2.ª Toda cantidad negativa es menor que cero.—3.ª De dos cantidades negativas es menor la que tiene mayor valor absoluto.—Algoritmo algebraico. (Párrafos 7 al 10.)

FÓRMULA DE LA POTENCIA DE UN BINOMIO.—Propiedades de esta fórmula.—1.ª El desarrollo obtenido es un polígono homogéneo y del grado m, respecto á las letras a y x.—2.ª El coeficiente de un término multiplicado por el exponente de x en el mismo, y dividido por el de a, más una unidad, es el coeficiente del siguiente.—3.ª El denominador de cada coeficiente es el producto de la serie natural de los números, hasta el que indica los términos que preceden al considerado, y el numerador el producto de otros tantos factores sucesivos descendentes, á partir de m.—4.ª El número total de términos es $m + 1$.—5.ª Los términos equidistantes de los extremos tienen igual coeficiente. 6.ª Los coeficientes aumentan desde el primero hasta el del término medio, si m es par, ó hasta el último de la primera mitad, si es impar.—7.ª La forma del desarrollo $(x-a)^m$ es igual á la de $(x-a)^m$, siendo alternativamente positivos y negativos los términos.—8.ª La suma de los coeficientes es igual á 2^m, y la suma de los de lugar par es igual á los de lugar impar. (Párrafo 67, observaciones.)

TRANSFORMACIONES QUE PUEDE EXPERIMENTAR UNA ECUACIÓN.—Objeto de las transformaciones.—Teoremas fundamentales de transformación.—Teorema 1.°: Cuando á los dos miembros de una ecuación se les agrega ó resta una misma cantidad numérica ó algébrica, se obtiene una ecuación equivalente.—Corolario: En toda ecuación puede suprimirse un término cualquiera de un miembro, llevándole al otro con signo contrario.—Teorema 2.°: Una ecuación se transforma en otra equivalente si se multiplican los dos miembros por una misma expresión numérica ó algébrica, siempre que ésta no contenga las incógnitas y sea distinta de cero y del infinito.—Corolario: Cuando algunos términos son fraccionarios y los denominadores no contienen ninguna incógnita, dicha ecuación puede transformarse en otra equivalente, cuyos términos sean enteros.—Escolio: Caso de que en una ecuación con una sola incógnita, algún término tenga la incógnita en el denominador, si la ecuación tiene más de una incógnita, no puede asegurarse que quitando denominadores se obtenga una ecuación equivalente cuando en ellos entra alguna de las incógnitas.—Teorema 3.°: Los dos miembros de una ecuación pueden dividirse por una cantidad, siempre que ésta no contenga á las incógnitas y sea distinta de cero ó infinito. Teorema 4.°: Si se elevan los dos miembros de una ecuación á una misma potencia, la nueva ecuación que resulta, no es, en general, equivalente á la primera. Teorema 5.°: Si se extraen raíces de igual orden de los dos miembros de una ecuación, pueden perderse algunas soluciones; comprobación extrayendo las raíces cuadradas en la ecuación $A^2 = B^2$. (Párrafos 116 al 118.)

Ejercicio: Resolución del siguiente problema: Hallar un número que aumentado en nueve veces su inverso, sea igual á 3. (Párrafo 162, problema 5.°)

PAPELETA 3.ª

CONCEPTO DE LAS OPERACIONES DE ÁLGEBRA.—Necesidad de nuevas definiciones.—*Adición.*—Definición, procedimiento.—Consecuencias: 1.ª La adición algebraica no supone aumento.—2.ª El orden de sumandos no altera la suma.—3.ª Toda serie de adiciones y substracciones puede considerarse como una suma algebraica.—Substracción.—Definición, procedimiento.—Consecuencia: La sustracción algebraica no supone disminución en el minuendo. (Párrafos 10 al 13.)

POTENCIAS Y RAICES DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.—Elevación á potencias.—Fórmula de la potencia de un polinomio.—Notaciones.

$$1.^a \quad \sum_{n=m}^{n=m'} f(n) \qquad 2.^a \quad \prod_{n=m}^{n=m'} f(n)$$

Aplicación de estas nociones á la fórmula del binomio.—Nueva expresión del término general del binomio.—Empleo de la última notación en la fórmula del binomio.—Fundamentándose en ella hallar el desarrollo de la fórmula $(a + b + c + d + \ldots + l)^m$.—Aplicar el desarrollo obtenido al cuadrado y al cubo de un polinomio.—Variación de las potencias de una cantidad.—Teorema 1.°: Las potencias sucesivas de una cantidad mayor que la unidad son mayores que la unidad y crecen ilimitadamente.—Teorema 2.°: Las potencias sucesivas de una cantidad menor que la unidad, son menores que la unidad y decrecen, siendo su límite cero. (Párrafos 68 al 70.)

CASO EN QUE ES MUY PEQUEÑO EL COEFICIENTE DEL TÉRMINO DE SECUNDO GRADO.—Inconvenientes de la fórmula general.—Cálculo de la menor raíz por aproximaciones sucesivas. (Párrafos 163 al 165.)

Ejercicio: Resolver el siguiente problema: El número de centinelas de un castillo es tal, que el producto de los dos números, inmediatamente superiores á él, iguala á 13, más 15 veces ese mismo número que quiere calcularse. (Párrafo 162, problema 4.°)

PAPELETA 4.ª

CONCEPTO DE LAS OPERACIONES DEL ALGEBRA.—Multiplicación.—Definición: Regla de signos.—Producto de varios factores.—Consecuencias: 1.ª El orden de los signos no altera el que corresponde al producto.—2.ª El producto total variará de signo cuando varíe el de uno de los factores.—División.—Definición.—Regla de signos.—Consecuencia: Cuándo variará el signo del cociente y cuándo permanecerá siendo el mismo.—Elevación á potencias.—Definición.—Signo de la potencia.—Extracción de raíces.—Definición. Signo de la raíz.—Forma imaginaria. (Párrafos 13 al 17.)

EXTRACCIÓN DE RAÍCES.—Definición.—Algoritmo.—Raíces de los monomios.—Regla: Condiciones para que un monomio tenga raíz exacta.—Variación de las raíces de una cantidad.—Teorema 1.°: Las raíces de una cantidad mayor que la unidad, son mayores que ésta, y mayores que dicha cantidad; disminuyen cuando aumenta el índice, y el límite inferior es la unidad.—Teorema 2.°: Las raíces de una cantidad menor que la unidad, son menores que ésta y mayores que dicha cantidad, aumentan con el índice, y su límite superior es la unidad. (Párrafos 70 al 73 y 76.)

TRANSFORMACIONES QUE PUEDE EXPERIMENTAR UN SISTEMA DE ECUACIONES.—Objeto de la transformación.—Transformaciones aisladas.—Idem de combinación. Teorema 1.°: En un sistema de ecuaciones puede substituirse una de ellas por la que resulte de sumarla, miembro á miembro, con otra cualquiera del sistema.—Corolario: Una ecuación de un sistema puede reemplazarse por la que resulte sumándola algebraicamente y miembro á miembro, con varias de las demás.—Teorema 2.°: En un sistema de ecuaciones puede, en general, substituirse una de ellas por la que se obtiene multiplicándola, miembro á miembro, con otra cualquiera del sistema.—Corolario: En un sistema puede, en general, reemplazarse una ecuación por la que resulte de multiplicarla, miembro á miembro, por cualquiera de las demás. Teorema 3.°: Una ecuación de un sistema puede, en general, reemplazarse por la que resulta de dividirla, miembro á miembro, por otra del sistema.—Teorema 4.°: En un sistema de ecuaciones puede substituirse una de ellas por la que se obtenga sumándole ó restándole las potencias de igual grado de los dos miembros de otra cualquiera del sistema.—Corolario: Una ecuación puede substituirse por la obtenida sumándole algebraicamente las potencias de otras varias del sistema, multiplicadas por números cualesquiera, siempre que sean los mismos los grados y los factores de los miembros de cada una.—Teorema 5.°: En un sistema de ecuaciones no es posible, en general, reemplazar una por la que resulte de sumarle ó restarle ordenadamente las raíces de igual orden de otra del sistema. (Párrafos 120 al 123.)

COMBINACIONES DE DESIGUALDADES.—1.ª Puede sumarse, miembro á miembro, varias desigualdades que se verifiquen en el mismo sentido.—2.ª Se pueden restar, miembro á miembro, dos desigualdades que se verifiquen en sentido contrario, dando á la desigualdad diferencia el signo de la que hace de minuendo.—3.ª Pueden multiplicarse, miembro á miembro, varias desigualdades que se verifiquen en el mismo sentido y cuyos miembros sean todos positivos.—4.ª Pueden dividirse, miembro á miembro, dos desigualdades que se verifiquen en sentido contrario y cuyos miembros sean todos positivos, dando á la desigualdad cociente el signo de la desigualdad dividendo ó signo contrario á la de divisor. Desigualdades de primer grado con una incógnita.—1.° Resolver una sola desigualdad.—2.° Resolver varias desigualdades con una sola incógnita. (Párrafos 142 y 144.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: El denominador de una fracción ordinaria, irreducible, excede en seis unidades á su numerador, y toda ella en $\frac{1}{12}$ á la que se obtiene disminuyendo una unidad á los dos términos, ¿cuál es esta fracción? (Párrafo 16?, problema 3.°)

PAPELETA 5.ª

EXPRESIONES ALGEBRAICAS.—Definición.—Monomio y polinomio.—Definición.—Cantidades incomplejas.—Cantidades complejas.—Términos semejantes. Cantidades racionales.—Cantidad entera. Cantidad fraccionaria.—Cantidades irracionales.—Valor numérico de una expresión algebraica.—Expresiones equivalentes.—Grado de una expresión.—Grado de un monomio entero.—Grado de un polinomio entero.—Grado de un monomio ó un polinomio con respecto á una letra que no contiene.—Grado de las expresiones fraccionarias ó irracionales.—Expresiones homogéneas.—Polinomio homogéneo.—Ordenación de polinomios.—Letra ordenatriz.—Polinomio completo ó incompleto.—Casos: 1.° Que el polinomio contenga dos letras y sea homogéneo.—2.° Que el polinomio considerado contenga varios términos, en los cuales la letra ordenatriz lleve el mismo exponente.—Generalización del convenio de la ordenación.—Simplificación de polinomios.—Regla práctica.—(Párrafos 17 al 26.)

POTENCIAS Y RAÍCES DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.—Extracción de raíces. Raíces de los polinomios.—Regla.—Aplicación de la regla á la extracción de la raíz cuadrada de un polinomio.—Condiciones para que un polinomio sea potencia perfecta.—Raíz inexacta de los polinomios. (Párrafos 73 al 76.)

ECUACIONES.—Forma general de una ecuación.—Clasificación de las ecuaciones.—Ecuación de primer grado con una incógnita.—Resolución de la ecuación.—Discusión de la fórmula.—Primer caso: Indeterminación.—Segundo caso: Imposibilidad. (Párrafos 118, 119, 123 y 124.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: Hallar en la recta que une dos focos luminosos A y B, el punto igualmente iluminado.—Discusión de la fórmula: 1.° $a > b$. 2.° $a = b$, si al mismo tiempo $d = o$; 3.° $a < b$. (Párrafo 162, problema 6.°)

PAPELETA 6.ª

OPERACIONES ELEMENTALES CON LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS ENTEROS.—Preliminares.—Objeto del cálculo algebraico.—Carácter de las operaciones algebraicas.—Adición.—Definición.—Algoritmo de la operación.—Procedimiento operativo.—Casos: 1.° Adición de monomios.—2.° Adición de monomio y polinomio.—3.° Adición de polinomios.—Regla general para sumar varias expresiones algebraicas.—Consecuencias.—Substracción.—Definición.—Algoritmo de la operación.—Procedimiento operativo.—Regla para restar dos expresiones algébricas.—Consecuencias: 1.ª Un polinomio cualquiera puede considerarse como la expresión de la diferencia de otros dos.—2.ª Todo polinomio equivale á la diferencia entre la suma de sus términos positivos y negativos.—3.ª Todos los términos de cualquier polinomio pueden encerrarse en un paréntesis, con diversos signos, afectando á dicho paréntesis del signo menos. (Párrafos 26 al 36.)

PROGRESIONES POR DIFERENCIA.—Definiciones: Términos; razón; progresiones crecientes, decrecientes, limitadas, indefinidas y debiemente indefinidas.—Algoritmo.—Propiedades.—Teorema 1.°: En toda progresión, un término es igual á otro anterior á él, más el producto de la razón por el número de los que le preceden á partir del considerado.—Recíproco.—Caso en que se tome para comparar un término, el primero de la progresión.—Teorema 2.°: Los términos de una progresión por diferencia creciente é indefinida, pueden ser mayores que cualquier cantidad.—Teorema 3.°: La suma de los términos equidistantes de los extremos es constante é igual á la de los extremos.—Teorema 4.°: La suma de todos los términos de una progresión limitada es igual á la semisuma de los términos extremos multiplicada por el número de términos de la progresión.—Fórmula de la suma en función del primer término.—Aplicaciones á la suma de la serie natural de los números y á la de los impares.—Interpolación diferencial.—Definición.—Procedimiento y signo de la razón.—Teorema 1.°: Si entre cada dos términos consecutivos de una progresión por diferencia interpolamos el mismo número de medios, resulta una sola progresión.—Teorema 2.°: Si entre dos cantidades a y b se interpolan $p - 1$ medios diferenciales, y después $p' - 1$ entre cada dos términos de la progresión resultante, se hallará una progresión idéntica á la que se hubiera formado interpolando $p\,p' - 1$ medios entre las dos primeras cantidades. (Párrafos 77 al 81.)

TEORÍA ELEMENTAL DE LA ELIMINACIÓN. Definición.—Necesidad de la eliminación. Método de sustitución.—Método de igualación.—Método de reducción.—Método de factores indeterminados. (Párrafos 125 al 131.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: Ha sido preciso vender un reloj en 22,75 pesetas, rebajando su coste primitivo en un tanto por ciento igual al número de pesetas que costó, ¿cuál fué su precio? (Párrafo 162, problema 1.°)

PAPELETA 7.ª

OPERACIONES ALGEBRAICAS.—Multiplicación.—Definición.—Algoritmo de la operación.—Procedimiento operativo.—Casos: 1.° Multiplicación de monomios enteros.—2.° Multiplicación de un polinomio por un monomio.—3.° Multiplicación de polinomios. (Párrafos 36 al 39.)

PROGRESIONES POR COCIENTE.—Definición; términos; razón; clases de progresiones.—Algoritmo.—Propiedades.—Teorema 1.°: En toda progresión un término es igual á otra anterior, multiplicado por una potencia de la razón cuyo exponente es el número de términos que median entre él y el considerado.—Recíproca.—Caso en que se tome el primer término como término de comparación. Teorema 2.°: Los términos de una progresión creciente é indefinida pueden llegar á ser mayores que cualquiera cantidad, y los de una decreciente tienen por límite cero.—Teorema 3.°: El producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al de estos extremos.—Teorema 4.°: El producto de todos los términos es la raíz cuadrada del producto de los extremos elevado á una potencia, cuyo exponente es el número de términos; aplicaciones.—Teorema 5.°: La suma de los términos de una progresión limitada, es la diferencia entre el producto del último por la razón y el primero, y dividida por la razón menos la unidad; extensión de la fórmula á los casos en que c es menor ó igual á la unidad; límite de la suma en las progresiones indefinidas. (Párrafos 81 al 84.)

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.—Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.—Resolución: 1.° Por sustitución.—2.° Por igualación.—3.° Por reducción.—4.° Por factores indeterminados.—Observaciones: 1.ª El denominador es el mismo en ambos, y el numerador de cada una se obtiene reemplazando en aquél los coeficientes por los segundos miembros.—2.ª Si en las ecuaciones propuestas se sustituye a, b y c por sus correspondientes a', b' y c' y al contrario, la primera ecuación se convierte en la segunda, y al contrario.—3.ª Permutando en las ecuaciones a y a' con b b' y x con y, el sistema no varía. (Parrafos 131 al 133.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: Se han embarcado en un vapor 360 tonelada de carbón, debiendo repartirse por igual entre cada uno de los días que debe durar el viaje; al emprender éste se navegaron cuatro días a la vela, aumentando así en tres toneladas la cantidad de carbón disponible por día. ¿Cuánto duró la navegación? (Párrafo 162, problema 2.°)

PAPELETA 8.ª

OPERACIONES ALGEBRAICAS.—Multiplicación.—Observaciones: 1.ª Con objeto de facilitar la reducción de términos semejantes, qué es lo que se hace con el multiplicando y multiplicador.—2.ª Caso en que la letra ordenatriz entre con el mismo exponente en varios términos.—3.ª Si los factores polinomios son más de dos, qué operación se ejecuta.—Consecuencias: 1.ª De dónde provienen el primero y último término del producto, cuando se multiplican dos polinomios ordenados.—2.ª Número de términos del producto.—3.ª Grado del producto de dos factores.—4.ª En el caso de que los factores sean homogéneos, qué deberá ser el producto.—Cambio de signo de una letra. (Párrafos 39 al 42).

PROGRESIONES POR COCIENTE.—Interpolación proporcional.—Definición, procedimiento.—Teorema 1.°: Si entre cada dos términos de una progresión se interpola el mismo número de medios, resulta una sola progresión.—Teorema 2.°: Si entre a y b interpolamos $p - 1$ medios proporcionales y después interpolamos $p' - 1$ medios entre cada dos términos de la progresión formada, resulta una progresión igual á la formada, interpolando $p\,p' - 1$ entre a y b.—Teorema 3.°: Interpolando un número suficientemente grande de medios proporcionales entre los términos de una progresión por cociente, podremos conseguir que la diferencia entre dos términos consecutivos de la nueva progresión sea tan pequeña como se quiera.—Cálculo de las anualidades.—Anualidad de amortización.—Anualidad de capitalización.—Parte de la $q.^{ésima}$ anualidad destinada á la amortización de capital.—Aplicación de las progresiones por cociente á las fracciones decimales periódicas. (Párrafos 85 al 88.)

SISTEMAS GENERALES DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.—Diferentes clases de sistemas.—1.° Forma determinada.—2.° Forma indeterminada.—3.° Forma de incompatibilidad.—Primera clase.—Regla para resolver el sistema.—Observaciones: 1.ª Caso en que es determinado; 2.ª Idem indeterminado; 3.ª Idem imposible; 4.ª Modo de efectuar la eliminación en la práctica; 5.ª Casos particulares.

Resolver el sistema de ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} 4x+3y-5z&=8\\ 5x+6y-2z&=47\\ 2x-4y+9z&=23 \end{aligned}$$

(Párrafos 135 al 137.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: Con dos vinos cuyos precios son a y b céntimos el litro, se desea formar una mezcla de d litros cuyo precio sea c céntimos el litro. (Párrafo 140, problema 9.°)

PAPELETA 9.ª

OPERACIONES ALGEBRAICAS.—División. Definición.—Algoritmo de la operación. Procedimiento operativo.—Casos: 1.° División de dos potencias de una misma cantidad.—2.° División de monomios enteros.—3.° División de un polimonio por un monomio.—División de un monomio por un polinomio.—4.° División de dos polinomios. (Párrafos 42 al 45.)

LOGARITMOS Y SUS APLICACIONES.—Preliminares.—Definición de logaritmo; restricción de la definición á las progresiones propuestas; extensión de la misma al logaritmo de un número interpolado en la progresión por cociente; condición para que un número conmensurable y mayor que uno pueda formar parte de la progresión por cociente, cuya razón es un número entero y cuyo primer término es la unidad; condición para que un número conmensurable y menor que la unidad pueda formar parte de la progresión por cociente, cuya razón es un número entero y cuyo primer término es la unidad; todo número conmensurable puede entrar en la progresión por diferencia si r es conmensurable.—Sistema de logaritmos.—Un número tiene infinitos logaritmos y un mismo logaritmo lo es de infinidad de números.—Base del sistema.—Algoritmo de los logaritmos comunes y neperianos.—Consecuencias: 1.ª En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la unidad es cero y el logaritmo de la base es la unidad.—2.ª Si la base es mayor que 1, á mayor número corresponde mayor logaritmo.—El logaritmo de infinito es infinito.—El logaritmo de cero es menos infinito.—Consecuencias si la base es menor que 1.—Los números negativos carecen de logaritmo. (Párrafos 88 al 93.)

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.—Forma indeterminada.—Número de soluciones. Caso en que el sistema será imposible.—Regla.—Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} 2x+3y-4z+2u&=-6\\ 4x-3y+2z-3u&=7 \end{aligned}$$

Forma de incompatibilidad. — Caso en que existen coeficientes indeterminados: ecuaciones de condición.—Caso en que el sistema es determinado ó indeterminado. — Regla. — Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x+y&=3+2b\\ x-y&=2a-1\\ bx-ay&=a^2-b^2\\ ax+by&=a^2+b^2+5 \end{aligned}$$

determinando los valores de a y b que hacen soluble el sistema. (Párrafos 137 al 139.)

Ejercicio.—Resolver el problema siguiente: Hallar un número que, dividido por el exceso sobre la unidad de otro número dado a, y multiplicando el cociente por el cuadrado de ese mismo número conocido, dé un producto igual á dicho cociente más 8. (Párrafo 140, problema 8.°)

PAPELETA 10.ª

OPERACIONES ALGEBRAICAS.—División. Observaciones: 1.ª No hay necesidad de escribir el producto del primer término del divisor por cada término del cociente.—2.ª Qué se hace cuando la letra ordenatriz entra en varios términos del dividendo y divisor con iguales exponentes.—3.ª Grado del cociente.—4.ª Dividendo y divisor homogéneos.—5.ª Ordenación del dividendo cuando carece de alguna potencia la letra ordenatriz.—6.ª Caso en que el cociente de dos polinomios es un monomio.—Condiciones para que un polinomio sea divisible por otro.—División inexacta. (Párrafos 45 al 48.)

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS. — Proposiciones generales: Teorema 1.°: El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores.—Generalización á un número cualquiera de factores.—Corolario 1.°: El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor; el logaritmo de una fracción es igual...—El logaritmo de un número entero es igual y de signo contrario al de su inverso, y el de una fracción igual y de signo contrario al de su inverso.—Corolario 2.°: El logaritmo de la potencia de un número es igual al exponente por el logaritmo de la base.—Corolario 3.°: El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raíz. (Párrafo 93 hasta el teorema 2.°)

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.—Discusión; su objeto.—Primer caso: El denominador común $ab'-ba'$ es distinto de cero; acuerdo de las fórmulas con las soluciones de la ecuación.—Segundo caso: El denominador es cero, y uno al menos de los coeficientes es distinto de cero y $cb'-bc' \gtrless o$ ó $cb'-bc'=o$; acuerdo de las fórmulas con las consecuencias deducidas de la ecuación; forma de poner de manifiesto en las ecuaciones la imposibilidad é indeterminación que dan las fórmulas; consecuencias de las hipótesis de este caso.—Tercer caso: El denominador y todos los coeficientes se reducen á cero; consecuencias. — Ecuaciones homogéneas. (Párrafos 133 al 135.)

Ejercicio.—Resolver el problema siguiente: Obtener un número tal, que restando de su duplo la tercera parte del cuádruplo del que se halla aumentándole 5, el resultado sea igual al número que se obtiene después de restar 6 á los dos tercios del que se pide, disminuído en una unidad. (Párrafo 140, problema 7.°)

PAPELETA 11.ª

OPERACIONES ALGEBRAICAS. — Casos particulares de la división.—1.° Dividir $x^m - a^m$ por $x-a$.—2.° Dividir $x^m + a^m$ por $x-a$.—3.° Dividir $x^m - a^m$ por $x+a$. 4.° Dividir $x^m + a^m$ por $x+a$.—Determinando en cada caso la ley del cociente y la condición de divisibilidad. (Párrafo 48.)

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS. — Teorema 2.°: Cuanto mayores son dos números y menor su diferencia, tanto menor es la diferencia de sus logaritmos.—Teorema 3.°: Las diferencias de dos números no son proporcionales á las diferencias de sus logaritmos; pero esta proporcionalidad es tanto más aproximada cuanto mayores son los números y menor su diferencia. (Párrafo 93, desde el teorema 2.°)

TEORÍA DE LAS DESIGUALDADES.—Principios fundamentales.—Definición.—Una desigualdad no cambia de sentido ó no se altera sumando ó restando una misma cantidad á sus dos miembros.—Consecuencias de este principio. — Una desigualdad no se altera multiplicando ó dividiendo sus dos miembros por una cantidad positiva, y cambian de sentido multiplicando ó dividiendo dichos miembros por una negativa.—Consecuencia: Qué debe hacerse al cambiar de signo á todos los términos de la desigualdad.—Pueden elevarse los dos miembros de una desigualdad á una potencia cualquiera de grado impar; y á una potencia de grado par, cuando sus miembros sean positivos.—Se puede extraer raíces de orden impar, de los dos miembros de una desigualdad cualquiera, y raíces de orden par, cuando sus miembros sean positivos y se tomen las raíces positivas.—Combinaciones de igualdades con desigualdades.—Demostrar: 1.° Una igualdad puede sumarse, miembro á miembro, con varias desigualdades que se verifiquen en el mismo sentido.—2.° Una igualdad y una desigualdad pueden restarse, miembro á miembro, dando á la desigualdad diferencia el signo de la desigualdad minuendo, ó signo contrario al de la sustraendo.—3.° Una desigualdad de miembros positivos se puede multiplicar ordenadamente con varias desigualdades que se verifiquen en igual sentido y cuyos miembros sean también positivos.—4.° Una igualdad y una desigualdad que cumplan con esta última condición pueden dividirse entre sí, miembro á miembro, ligando los cocientes por el signo de la desigualdad dividiendo ó por el opuesto de la desigualdad divisor. (Párrafos 141 al 142 y 143 á 144.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: Hallar un número que, disminuído en sus tres cuartas partes y aumentado en la sexta, dé dos unidades más que los cinco dozavos de dicho número. (Párrafo 140, problema 6.°)

PAPELETA 12.ª

OPERACIONES ELEMENTALES CON LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.— Fracciones algebraicas.—Definición.—Algoritmo de las operaciones fraccionarias. — Transformaciones y procedimiento operativo; simplificación y reducción á un común denominador.—Operaciones con las fracciones — Suma, resta, multiplicación y división. (Párrafos 49 al 52.)

LOGARITMOS DECIMALES.—Definición.—Propiedades particulares de este sistema.—Teorema 1.°: El logaritmo de una potencia de 10 es igual al grado de la potencia.—Teorema 2.°: Las unidades enteras y decimales de diversos órdenes son los únicos números conmensurables cuyos logaritmos son igualmente conmensurables.—Teorema 3.°: La característica ó parte entera del logaritmo de un número mayor que la unidad tiene tantas unidades como cifras enteras, menos una, tiene dicho número.—Teorema 4.°: La mantisa ó parte decimal del logaritmo de un número no se altera multiplicando ó dividiendo éste por cualquier potencia de 10.—Corolario: Cuando dos números tienen las mismas cifras colocadas en el mismo orden, no difiriendo sino por la posición de la coma, sus logaritmos tienen la misma mantisa.—Teorema 5.°: La característica del logaritmo de un número menor que la unidad tiene tantas unidades negativas como indica el lugar de la primera cifra decimal significativa de la izquierda.—Escolio: Transformación de un logaritmo todo negativo, en otro que tenga la característica negativa y mantisa positiva; transformación contraria. (Párrafos 94 al 96.)

INTERPRETACIÓN EN CONCRETO DE LOS VALORES DE LAS INCÓGNITAS.—Consideraciones generales; condiciones á que deben satisfacer las soluciones; significación de las formas $\frac{m}{o}$ y $\frac{o}{o}$; carácter de las cantidades positivas y negativas.—Aplicación al siguiente problema: Dos móviles parten al mismo tiempo de los puntos A y B que distan d metros y recorren la recta que los une, con movimiento uniforme y en el sentido A B; sus velocidades son respectivamente v y v' metros por segundo, y se pide la distancia del punto A al de encuentro.—Interpretación de los resultados según sea: 1.° $v > v'$; 2.° $v = v'$; 3.° $v = v'$ y $d = o$; 4.° $v - v' > o$ y $d = o$; 5.° $v < v'$; considerando que los móviles no parten precisamente de A y B, sino que se mueven desde tiempo indefinido.—6.° Si dichos móviles marchan en sentidos opuestos.—7.° Cuando $v < v'$ se supone que v' va disminuyendo. (Párrafo 139 y problema 10 del 140.)

PAPELETA 13.ª

OPERACIONES ALGEBRAICAS.—Formas simbólicas que proceden de la fracción. Forma $\frac{a}{o}$; ejemplo; condición para que un producto de dos factores se convierta en cero.—Forma $\frac{o}{b}$; ejemplo.—Forma $\frac{a}{\infty}$; ejemplo; reducción de esta forma á la anterior.—Forma $\frac{\infty}{b}$; ejemplo; reducción de esta forma á la forma $\frac{a}{o}$.—Forma $\frac{o}{o}$; ejemplo; verdadero valor que se presenta bajo esta forma.—Forma $\frac{\infty}{\infty}$; reducción de esta forma á la anterior.—Forma $\frac{o}{\infty}$; reducción á la forma $\frac{o}{b}$.—Forma $\frac{\infty}{o}$; reducción á la forma $\frac{a}{o}$. (Párrafo 52.)

TABLAS DE LOGARITMOS DECIMALES.—Definición.—Descripción de la tablas; sencillas y de doble entrada; tabla 1.ª de Schrön; partes de que consta; error con que están calculados los logaritmos; trazo horizontal; disposiciones de la 1.ª parte; ídem de la 2.ª y 3.ª; asteriscos; diferencias tabulares; tablas de partes proporcionales; índice para hallar un número ó un logaritmo dado. (Párrafos 96 y 98.)

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.—Resoluciones de la ecuación completa.—Forma general de la ecuación.—Obtención de la fórmula.—Regla.—Casos particulares en que $a = 1$ y $B = 2b$.—Discusión de la fórmula general que da las raíces.—Relaciones entre los coeficientes y las raíces.—Modo de hallar dos números cuyo producto y suma se conocen. (Párrafos 150 al [illegible].)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: En una reunión de doce personas se ha hecho una colecta para los pobres, habiendo dado cada mujer cuatro pesetas y cada hombre seis; la suma total asciende á 65 pesetas, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres había? (Párrafo 140, problema 1.°)

PAPELETA 14.ª

PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS ENTEROS.—Definición.—Teoremas relativos á los polinomios enteros.—Teorema 1.°: Si un polinomio entero, con respecto á la letra x, se anula cuando á esta letra se le da el valor a, dicho polinomio es divisible por $x - a$.—Teorema 2.°: Si un polinomio entero y del grado m, con relación á x, se anula para m valores de esta letra, dicho polinomio es un producto de m factores de la forma $x - a$, y de un factor independiente de x.—Corolario: Si un polinomio entero se anula para más de m valores de su variable, el factor independiente es cero. (Párrafos 53 y 54, hasta el teorema 3.°)

USO DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS.—Principios fundamentales.—Teorema 1.°: El logaritmo de un número comprendido entre dos enteros consecutivos de la tabla, es aproximadamente igual al logaritmo del número inferior inmediato más el producto de la diferencia tabular, por la que existe entre este último número y el propuesto.—Causas de error y límite. Teorema 2.°: El número correspondiente á un logaritmo comprendido entre dos consecutivos de las tablas, es aproximadamente igual al número entero que corresponde al logaritmo inferior inmediato más el cociente de dividir por la diferencia tabular, la que existe entre este último logaritmo y el logaritmo dado.—Causas de error y límite. (Párrafo 99.)

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.—Diversas clases de raíces.—Discusión.—Casos: 1.° $b^2 - 4ac > o$; 2.° $b^2 - 4ac = o$; 3.° $b^2 - 4ac < o$.—Signo de las raíces:

$$c > o \begin{cases} b > o \\ b < o \end{cases} \quad c < o \begin{cases} b > o \\ b < o \end{cases}$$

Deducir el número de raíces positivas ó negativas por el número de variaciones ó permanencias de la ecuación. (Párrafos 153 al 155.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: Hallar un número de dos cifras en el cual el cuádruplo de la cifra de las unidades exceda en una unidad al triplo de la cifra de las decenas, y que restando el número invertido se tenga por resto 36. (Párrafo 140, problema 2.°)

PAPELETA 15.ª

PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS ENTEROS.—Definición de polinomio idénticamente nulo.—Teorema 3.°: Si un polinomio entero se anula para más valores de su variable que el grado, es idénticamente nulo, es decir, tiene sus coeficientes iguales á cero.—Teorema 4.°: Si dos polinomios enteros con relación á x se hacen iguales para más de m valores de x, siendo m el mayor de los grados de ambos polinomios éstos son idénticos.—Teorema 5.°: Todo polinomio entero puede descomponerse de un solo modo en dos partes, de las cuales una contenga como factor á otro polinomio dado y la otra sea un polinomio de grado inferior al segundo de los que se consideran. (Párrafo 54, desde el teorema 3.°)

MANEJO DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS. Problema directo.—Primer caso: Hallar el logaritmo de un número entero ó decimal que prescindiendo de la coma no exceda al límite superior de la tabla.—Segundo caso: Hallar el logaritmo de un número entero ó decimal que prescindiendo de la coma exceda al límite superior de la tabla.—Problema inverso.—Primer caso: Hallar el número correspondiente á un logaritmo que, abstracción hecha de la característica, está en la tabla.—Segundo caso: Hallar el número correspondiente á un logaritmo que, abstracción hecha de la característica, no está contenido en la tabla. (Párrafos 100 y 101.)

PROPIEDADES DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO.—Descomposición en factores. A quién es igual todo trinomio de segundo grado.—Caso en que x' y x'' sean imaginarias.—Variaciones de signo.—Raíces reales y desiguales.—Raíces iguales.—Raíces imaginarias.—Consecuencias: 1.ª Cuándo un número estará comprendido ó no entre las raíces.—2.ª Cuándo será superior ó inferior á dichas raíces. 3.ª Si se sustituye en vez de x un número, dando un resultado de sentido contrario al primer coeficiente, las raíces son reales y desiguales. (Párrafos 155 al 157.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: Un comerciante paga por un viaje un número tal de duros, que si de tres veces la suma satisfecha, valuada en pesetas, se resta su mitad, la diferencia excede á 768 pesetas, precisamente en esa suma cuyo valor quiere calcularse. (Párrafo 140, problema 3.°)

PAPELETA 16.ª

PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS ENTEROS.—Métodos de los coeficientes indeterminados.—Problema: Hallar el cociente de dividir un polinomio P, entero con relación á x, por el binomio $x - a$; ley de formación de los términos del cociente y del resto.—Propiedades que resultan.—Recíproco del teorema 1.°: Si un polinomio entero con respecto á una letra x es divisible por el binomio $x - a$, dicho polinomio se anula cuando se sustituye en él x por a.—Escolio: Necesidad de que el polinomio sea completo; caso en que sólo quiera conocerse el resto. (Párrafo 55.)

CÁLCULO LOGARÍTMICO.—Utilidad del empleo de los logaritmos en los cálculos numéricos.—Potencias de exponente considerable; raíces de grado superior al tercero; fórmula calculable por logaritmos; cuadros logarítmicos.—Multiplicación.—División, conversión de las restas en sumas por el cologaritmo.—Potencia; caso en que el logaritmo es negativo.—Raíz; caso en que la característica del logaritmo es negativa y no divisible por el índice. (Párrafos 102 al 107.)

LOGARITMOS Y SUS APLICACIONES.—Fórmulas referentes á las anualidades.—Anualidad de amortización.—Anualidad de capitalización. (Párrafo 108.)

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.—Resolución de las ecuaciones incompletas.—Objeto especial de esta resolución.—Anulación de un solo término.—1.° $c = o$; 2.° $b = o$; 3.° $a = o$; fórmula general según sea $b \gtrless o$.—Anulación de los dos términos.—Casos: 1.° $a = o$, $b = o$, $c \gtrless$ [illegible]; 2.° $a = o$, $c = o$, $b \gtrless$ [illegible]; 3.° $b = o$, $c = o$.—Anulación [illegible] (Párrafos 157 al 161.)

Ejercicio: Resolver [illegible] siguiente: [illegible] cuyo [illegible] del entero [illegible] cho número primo, iguale al cuádruplo de este mismo, aumentado en dos unidades. (Párrafo 140, problema 4.°)

PAPELETA 17.ª

[illegible] D[illegible] LAS EXPRESIO-[illegible]S [illegible] [illegible] — Agr[illegible] [illegible] de operar directamente [illegible] los radicales.—Determinación aritmética de un radical.—Caso en que la cantidad subradical sea una potencia perfecta del grado m; cuando no goce de esta propiedad; cuando la cantidad subradical sea á su vez inconmensurable. (Párrafos 56 al 60.)

APLICACIÓN DE LOS LOGARITMOS Á LA REGLA DE INTERÉS COMPUESTO Y Á LAS ANUALIDADES.—Fórmulas relativas al interés.—Caso en que en el tiempo hay una fracción de año; generalización de la fórmula obtenida en aritmética cuando el interés es compuesto durante cualquier parte alícuota del año; fórmulas logarítmicas para la determinación de cada una de las cantidades C, c, r y t en función de las otras tres, en el caso de ser el tiempo un número exacto de años, y cuando en el tiempo haya una fracción de año; obtener el tanto por uno sin salir de los conocimientos del Algebra elemental, de la fórmula $C = c\,(1 + r)^t\,(1 + f\,r)$. — Fórmulas referentes á las anualidades. — Anualidad de amortización; aplicación de los logaritmos á dicha fórmula; observación relativa al valor de n cuando éste no sea entero; cálculo de r por tanteos.—Anualidad de capitalización; aplicación de los logaritmos á la fórmula de dicha anualidad; observación respecto al valor de n cuando éste no sea entero; determinación de r por tanteos.—Ejercicio. (Párrafos 107 al 109.)

INTERPRETACIÓN DE LAS RAÍCES EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS.—Caracteres de esta interpretación.—Aplicación de las consideraciones relativas á las ecuaciones de segundo grado; duplicidad de valores de las incógnitas; valores inconmensurables ó imaginarios.—Aplicación al problema siguiente: Hallar en la recta que une dos focos luminosos A y B, el punto donde debe colocarse una pantalla para que reciba cantidades iguales de luz.—Discusión de la fórmula.—1.° $a > b$; 2.° $a = b$; 3.° $a < b$, y estos mismos casos para $d = o$. (Párrafos 161 y 162, problema 6.°)

PAPELETA 18.ª

RAÍCES DE LAS EXPRESIONES ALGEBRÁICAS.—Transformación de los radicales.—Teorema 1.°: Cuando la cantidad subradical puede descomponerse en dos factores, de los cuales uno sea potencia perfecta del grado que expresa el índice, se simplifica el radical sacando fuera de él como factor la raíz del que es potencia perfecta.—Teorema recíproco.—Radicales semejantes.—Teorema 2.°: Un radical no se altera multiplicando el índice y el exponente de la cantidad subradical por un mismo número.—Teorema recíproco. Corolario: Para reducir varios radicales á un mismo índice se multiplican el de cada uno y el exponente de su cantidad subradical por el producto de los índices de los demás; y si dichos índices tienen factores comunes, se multiplican por el cociente que resulta de dividir su mínimo común múltiplo por cada uno de ellos.—Operaciones con las cantidades radicales; adición y sustracción, multiplicación, división, potencia, raíz.—Observaciones: 1.ª, 2.ª $\left(\sqrt[m]{A}\right)^n$ siendo $m = n\,p$, 3.ª $\left(\sqrt[m]{A}\right)^n$, siendo $m = m'\,p$ y $n = n'\,p$.—Escolio: Caso en que en un radical la cantidad subradical es una potencia cuyo exponente es un múlt[illegible] —Observaciones.—Potencias [illegible] frac[illegible]. (Párrafos 60 á 62.)

CÁLCULO LOGARÍTMICO.—Utilidad del empleo de los logaritmos en los cálculos numéricos. — Potencias de exponente considerable.—Raíces de grado superior á tercero.—Fórmulas calculables por logarismos.—Disposición de los cálculos en las operaciones de multiplicar.—División.—Conversión de los restos en sumas por el cologaritmo.—Potencias.—Caso en que el logaritmo es de característica negativa y mantisa positiva.—Raíz.—Caso en que la característica es negativa y no divisible por el índice. (Párrafos 102 al 107.)

PROPIEDADES DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO.—Descomposición en factores. Todo trinomio de segundo grado es igual al producto del coeficiente de x^2 por los binomios del primer grado que obtenemos restando de x cada una de las raíces de la ecuación que resulta igualándola á cero.—Variaciones de signo.—Primer caso: $b^2 - 4\,a\,c > 0$, $x' > x''$; segundo caso: $b^2 - 4\,a\,c = 0$, $x' = x''$; tercer caso: $b^2 - 4\,a\,c < 0$.—Forma del trinomio.—Valor mínimo ó máximo según sea $a \gtrless 0$.—Consecuencias: 1.ª Determinar si un número está comprendido entre las raíces de una ecuación sin resolver ésta y sabiendo únicamente que son reales y desiguales; reconocer si dicho número es superior ó inferior á las raíces.—2.ª Si un número substituído en el primer miembro de una ecuación de segundo grado da un resultado de signo contrario al del primer coeficiente, las raíces son reales y desiguales.—Límite de los valores de x capaces de satisfacer á $x^2 + b\,x + c \gtrless 0$. (Párrafos 155 al 157.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: Determinar dos números cuya suma y diferencia guarden la relación $\frac{a}{b}$, sabiendo que s representa la suma del doble del primero más el segundo. (Párrafo 115, problema 2.°)

PAPELETA 19.ª

POTENCIAS Y RAÍCES DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.—Cálculo de las cantidades radicales.—Racionalización de los denominadores de ciertas expresiones irracionales.—Casos:

$$1.^{\circ}\ \frac{a}{\sqrt{b}} \qquad 2.^{\circ}\ \frac{N}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$3.^{\circ}\ \frac{N}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Casos en que son más de tres los radicales contenidos en el denominador. (Párrafo 63.)

PROGRESIONES POR COCIENTE.—Cálculo de las anualidades.—Fórmula de la anualidad de amortización por la aplicación de las progresiones; fórmula de la parte que de la $q.^{\text{ésima}}$ anualidad se destina á la amortización; fórmula de la anualidad de capitalización por la aplicación de las progresiones.—Aplicación de las progresiones por cociente á las fracciones decimales, periódicas puras y mixtas. (Párrafos 86 y 87.)

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.—Resolución de la ecuación completa.—Forma general de la ecuación.—Obtención de la fórmula.—Regla.—Casos particulares: $a = 1$, $b = 2\,b'$.—Discusión de la fórmula general que da las raíces.—Relación entre los coeficientes y las raíces; modo de hallar dos números cuyo producto y suma se conocen.—Diversas clases de raíces. Caso 1.° $b^2 - 4\,a\,c > 0$; 2.° $b^2 - a\,c = 0$; 3.° $b^2 - 4\,a\,c > 0$.—Raíces imaginarias. (Párrafos 150 al 154.)

Ejercicio: Resolver el problema siguiente: Hallar la profundidad de un pozo de mina, dejando caer en él una piedra y contando el número a de segundos transcurridos desde el momento en que se abandona á su propio peso, hasta el instante en que se percibe el sonido de su llegada al fondo del pozo. (Párrafo 162, problema 7.°)

PAPELETA 20.ª

OPERACIONES ALGEBRAICAS. — Casos particulares de la división.—1.° Dividir $x - a$ por $x - a$.—2.° Dividir $x + a$ por $x - a$.—3.° Dividir $x - a$ por $x + a$—4.° Dividir $x + a$ por $x + a$.—Determinado en cada caso la ley del cociente y la condición de divisibilidad. (Párrafo 48.)

PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS ENTEROS.—Método de los coeficientes indeterminados.—Problema: Hallar el cociente de dividir un polinomio P, entero, con relación á x, por el binomio $x - a$; ley de formación de los términos del cociente y del resto.—Propiedades que resultan.—Recíproco del teorema 1.°—Si un polinomio entero con respecto á una letra x, es divisible por el binomio $x - a$, dicho polinomio se anula cuando se sustituye en él x por a.—Escolio: Necesidad de que el polinomio sea completo: caso en que sólo quiera conocerse el resto. (Párrafo 55.)

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.—Análisis de los sistemas indeterminados de primer grado.—Objeto del análisis.—Soluciones enteras de la ecuación de primer grado con dos incógnitas.—Demostrar que para que una ecuación de primer grado con dos incógnitas tenga soluciones enteras, es necesario que el $m.\ c.\ d.$ de los coeficientes, divida el término conocido.—Resolución en el caso de ser la unidad uno de los coeficientes.—Resolución cuando ninguno de los coeficientes es la unidad.—Obtención de un sistema de soluciones: 1.°, por el procedimiento de las divisiones sucesivas; 2.°, por el de la suma ó la diferencia de múltiplos de los coeficientes que divida al término conocido; 3.°, por el método de las fracciones continuas.—Obtención de las fórmulas generales que comprenden infinitas soluciones en función de un número entero.—Las soluciones enteras de la ecuación de primer grado con dos incógnitas, son los términos correspondientes de dos progresiones por diferencia doblemente indefinidas, tales que la razón de la que forman los valores de y, es el coeficiente x, con su mismo signo, y la de la progresión que comprende los valores de x, el coeficiente de y con el signo contrario.—Procedimiento para hallar una primera solución.—Por sustituciones sucesivas.—Cuando $c = o$.—Procedimiento empírico.—Método de las fracciones continuas. (Párrafos 146 al 148).

Ejercicio: Resolver en números enteros la siguiente ecuación: $11\,x - 19\,y = 90$.

Geometría.—Texto: Ortega.

Duodécima edición (1910).

PAPELETA 1.ª

GEOMETRÍA PLANA.—Cuerpo: Sus propiedades físicas.—Volumen.—Dimensiones.—Superficie.—Línea.—Punto.—Consideraciones.—Representación gráfica de los elementos geométricos: Figuras.—Geometría: Su objeto.—Clasificación de las líneas y superficies: Línea recta.—Propiedades.—Línea curva.—Línea quebrada y mixta.—Superficie plana.—Superficie curva.—Superficies poliedrales y mixtas.—Representación gráfica del plano.—División de la Geometría.—*Propiedades de la línea recta y de la línea quebrada.*—Consecuencias de la definición de la línea recta: 1.ª Entre dos puntos sólo puede existir una línea recta.—2.ª Si dos rectas tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su extensión.—3.ª Para determinar una recta son necesarios dos puntos.—Segmento de una recta; regiones de un plano; rectas iguales y rectas desiguales; suma de dos segmentos. (Introducción y párrafos 1 al 3.)

Relaciones métricas entre los elementos de un triángulo.—Definiciones para proyección de un punto ó una recta sobre otra recta.—Teorema: Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular á la hipotenusa, se verifica: 1.° El triángulo propuesto se descompone en otros dos semejantes al mismo y, por consiguiente, entre sí.—2.° Dicha perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos en que divide á la hipotenusa.—3.° Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.—4.° El cuadrado del número que mide la longitud de la hipotenusa, es igual á la suma de los cuadrados de los números que expresan las longitudes de los catetos.—5.° Los cuadrados de los números que miden las longitudes de los tres lados, son proporcionales á las longitudes de las proyecciones de dichos lados sobre la hipotenusa.—Colorarios: 1.° Si desde un punto de una circunferencia se traza una perpendicular á un diámetro, esta perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.—2.° Toda cuerda es media proporcional entre el diámetro que pasa por uno de sus extremos y su proyección sobre él.—3.° Si por el extremo de un diámetro se trazan varias cuerdas, los cuadrados de sus longitudes son proporcionales á las longitudes de sus proyecciones sobre dicho diámetro. 4.° Calcular uno de los lados de un triángulo rectángulo.—5.° Calcular el lado de un cuadrado, dada la diagonal y viceversa. (Párrafos 290 al 293).

Problemas.—Determinar geométricamente dos segmentos de recta cuya diferencia y productos sean conocidos.—Dados dos polígonos semejantes, construir un tercero semejante á ellos y cuya área sea igual á la suma de sus áreas. (Párrafos 313 á 451).

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Rectas y planos.*—Determinación de un plano.—En qué se diferencian los razonamientos hechos en la Geometría plana y en la del espacio.—Cómo se considera el plano en la Geometría del espacio.—Deducción de la definición del plano.—Que si una recta tiene dos puntos en un plano, estará toda ella...—Consecuencias que se deducen de hacer girar un plano alrededor de una recta determinada por la unión de dos de sus puntos.—Considerar el caso de que además de la recta se dé un punto.—Consecuencias: 1.° Una recta y un punto fuera de ella, determinan...—2.° Tres puntos que no están en línea recta, determinan... 3.° Para que dos planos se confundan, basta...—Determinación por dos rectas que se cortan ó dos paralelas. Párrafos 465 al 471.)

Poliedros.—Definición y clasificación de los poliedros.—Caras, aristas, vértices, diagonal, plano diagonal.—Poliedro convexo y cóncavo.—Caracteres para reconocer si un poliedro es convexo.—1.° Un poliedro convexo queda todo á un mismo lado de una de sus caras prolongada indefinidamente.—2.° Una recta sólo puede cortar en dos puntos á la superficie de un poliedro convexo.—3.° Los planos diagonales en los poliedros convexos son siempre interiores.—Poliedros regulares ó irregulares.—Nombres que reciben los poliedros por los números de caras que los limitan.—Párrafos 708 al 710.)

Problema.—Trazar por una recta el plano perpendicular á otro. (Párrafo 554).

PAPELETA 2.ª

GEOMETRÍA PLANA.—Línea quebrada.—Definición y clasificación; Lados; Línea quebrada cóncava y convexa; Figuras abiertas y cerradas.—Una línea poligonal convexa sólo puede ser cortada por una recta en dos puntos.—Si una recta y una quebrada tienen los extremos confundidos...—Teorema: Si dos líneas poligonales convexas tienen sus extremos confundidos envolviendo la una á la otra, la que envuelve es mayor que la envuelta.—Toda línea quebrada convexa es menor que cualquiera otra quebrada que la envuelva completamente. (Párrafos 3 al 7.)

Propiedades y relaciones métricas en un triángulo.—Teorema: En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado opuesto á un ángulo agudo, es igual á la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos, disminuída en el duplo de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.—Teorema: En todo triángulo obtunsángulo, el cuadrado de la longitud del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual á la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos, aumentada en el duplo de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.—Escolio: Consecuencias de los tres últimos teoremas: El cuadrado de la longitud de un lado de un triángulo, es menor, igual ó mayor que la suma de las longitudes de los otros dos, según que el ángulo opuesto...—Recíproco. (Párrafos 293 al 296.)

Problemas.—Dado un polígono regular inscripto en una circunferencia, inscribir en ella otro de doble número de lados y calcular su lado en función del de aquél. Escolios: 1.° Dada la cuerda de un arco, calcular la del arco mitad.—2.° El perímetro del polígono buscado es mayor que el del propuesto.—3.° Si se tratara del problema inverso.—Construir un círculo equivalente á un polígono dado. (Párrafos 344, 345 y 452.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Rectas y planos.*—Posiciones relativas de dos rectas.—Consecuencias.—Posiciones relativas de dos planos.—Ver lo que sucede cuando dos planos tienen un punto ó dos comunes.—Planos paralelos.—Consecuencias.—Posiciones relativas de rectas y planos. (Párrafos 471 al 482.)

Pirámide.—Definiciones.—Pirámide triangular, cuadrangular, pentagonal, etc. Pirámide regular ó irregular.—Pirámide truncada.—La pirámide y el tronco de pirámide no son poliedros regulares.—Cómo puede considerarse engendrada la superficie lateral de una pirámide.—Cómo inscripto y circunscripto á la pirámide. (Párrafos 710 al 713.)

Problemas.—Hallar el polo del círculo menor, que pase por tres puntos dados en una superficie esférica.—Dados sobre una esfera, un punto y una circunferencia de círculo máximo, trazar otra por dicho punto que forme con la dada un ángulo determinado. (Párrafos 705 y 706.)

PAPELETA 3.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Angulos.*—Definiciones.—Lados.—Vértice.—Angulos adyacentes.—Opuestos por el vértice.—Bisectriz.—Suma y diferencia de ángulos.—Magnitud de un ángulo.—Angulo convexo y cóncavo.—Perpendicular.—Angulo recto.—Teorema: Por un punto dado sobre una recta se puede siempre trazar una perpendicular, y sólo una, á dicha recta. Corolario: Todos los ángulos rectos son iguales.—Observación.—Angulo agudo y obtuso.—Complementarios y suplementarios. (Párrafos 7 al 14.)

Relaciones métricas entre los elementos de un triángulo.—Teorema: La suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al duplo del cuadrado de la mediana relativa al tercer lado, más el duplo del cuadrado de la mitad de este tercer lado.—Corolario: El lugar geométrico de las posiciones de un punto tal que la suma de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos sea una cantidad constante, es una circunferencia, cuyo centro es el punto medio de la distancia que separa los puntos dados.—Teorema: La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al duplo del tercer lado, multiplicado por la proyección sobre el de la mediana correspondiente al mismo.—Corolario: El lugar geométrico de las posiciones de un punto tal que las diferencias de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos B y C sea una cantidad constante N^2, es una perpendicular trazada por un punto que dista del medio de la recta que une los dos fijos $\frac{N^2}{2\,B\,C.}$ (Párrafos 296 al 300.)

Problemas.—Dividir una recta en partes proporcionales á otras dadas.—Escolio: Dividir un segmento en partes iguales.—Transformar un polígono en un cuadrado equivalente. (Párrafos 305, 306 y 450.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Propiedades de las rectas y planos debidas á su posición relativa.*—Rectas paralelas.—Teorema: Por un punto dado en el espacio se puede siempre trazar una paralela á una recta, y nada más que una.—Teorema: Si dos rectas son paralelas, todo plano que corte á una de ellas, cortará también á la otra.—Teorema: Si dos rectas son paralelas, toda recta paralela á la una lo es también á la otra ó coincide con ella.—Corolarios: 1.° Todas las paralelas que se pueden trazar á una dirección dada por los distintos puntos de una recta, están en un plano.—2.° Si por dos rectas paralelas se hacen pasar dos planos que se corten, la intersección de éstos es paralela á dichas rectas. (Párrafos 482 al 487.)

Propiedades de los tetraedros.—Teorema: En todo tetraedro se verifica que los planos bisectores de los seis diedros, se cortan en un punto que equidista de las cuatro caras.—Corolarios: 1.° Los planos bisectores de los diedros, cuyas aristas concurren en un mismo vértice, se cortan según una recta.—2.° Los planos bisectores de los diedros cuyas aristas forman una cara, se cortan en un punto.—3.° Las perpendiculares trazadas á las cuatro caras desde el punto común á todos los planos bisectores, son iguales.—Definición de esfera inscripta y esferas ex inscriptas.—Teorema: Si por los puntos medios de las aristas de un tetraedro se trazan planos perpendiculares á las respectivas aristas, estos planos se cortan en un punto.—Corolarios: 1.° Planos perpendiculares en los puntos medios de tres aristas que forman una cara...—2.° Idem en las tres aristas que concurran á un vértice...—3.° Esfera circunscripta á un tetraedro.—Escolio: El teorema puede enunciarse: Las perpendiculares trazadas á las cuatro caras de un tetraedro, por los centros de los círculos circunscritos á cada una de ellas, se cortan en un mismo punto, que puede ser el centro de una esfera circunscrita al tetraedro.—Teorema: En todo tetraedro se verifica que las rectas que unen cada vértice con el punto de intersección de las medianas de la cara opuesta, se cortan en un mismo punto que se encuentra en las citadas rectas á la cuarta parte, á contar desde la cara, ó á las tres cuartas partes, á partir del vértice.—Corolario: Los planos determinados por una arista y el punto medio de la opuesta, se cortan en un punto que cumple las condiciones del teorema. (Párrafos 713 al 722.)

Problema.—Hallar el radio de una esfera sólida. (Párrafos 700 y 701.)

PAPELETA 4.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Propiedades de los ángulos.*—Teorema: Los dos ángulos adyacentes que forma una recta cuando encuentra á otra, son suplementarios.—Recíproco.—Si dos ángulos adyacentes son suplementarios, los lados no comunes estarán en línea recta.—Corolario 1.°: Si á un mismo lado de una recta y por uno de sus puntos se trazan otras varias, la suma de los ángulos sucesivos que forman todas ellas es igual á dos ángulos rectos.—Corolario 2.°: La suma de todos los ángulos consecutivos que se forman alrededor de un punto por varias rectas que concurran en él, es igual á cuatro ángulos rectos.—Teorema: Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.—Escolio: Si una recta es perpendicular á otra, ésta lo es también á la primera; y si dos rectas son perpendiculares, lo son también sus prolongaciones.—Teorema: Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios, son perpendiculares. Escolio: Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice, forman una misma recta, y las de los cuatro ángulos formados por dos rectas al cortarse, lo verifican en ángulo recto en el vértice de dichos ángulos. (Párrafos 14 al 21.)

Relaciones métricas entre los elementos de un cuadrilátero inscriptible.—Teorema: La suma de los cuadrados de los cuatro lados de un cuadrilátero es igual á la suma de los cuadrados de sus diagonales más el cuadrado del duplo de la recta que une los puntos medios de las mismas.—Corolario: Cuándo es paralelogramo.—Teorema: En todo cuadrilátero inscriptible en una circunferencia, el producto de las diagonales es igual á la suma de los productos de los lados opuestos. (Párrafos 300 al 303.)

Problemas.—Dividir una recta, un arco ó un ángulo en dos partes iguales.—Escolios: 1.° Dividir una recta, un arco ó un ángulo en 2^n partes iguales.—2.° Trazar las bisectrices de dos ángulos adyacentes y suplementarios.—Transformar un triángulo en otro equivalente y que tenga la misma base. (Párrafos 191, 192 y 444.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Paralelismo de rectas con planos.*—Definición.—Teorema: Si una recta es paralela á otra situada en un plano, será también paralela á este plano.—Corolarios: 1.° Si dos rectas son paralelas, todo plano que pase por una de ellas ó le sea paralelo, será también paralelo á la otra ó la contendrá.—2.° Por un punto dado pueden pasar infinitos planos paralelos á una recta. Escolio: Averiguar si una recta es paralela á un plano.—Teorema: Si una recta es paralela á un plano y por un punto de éste se traza una paralela á aquélla, la recta trazada estará situada en el plano. Corolario: Si una recta es paralela á dos planos que se cortan, la intersección de éstos es paralela á dicha recta.—Escolio: Si una recta es paralela á un plano, la intersección de éste con otro cualquiera que pase por la recta será paralela á esta última.—Teorema: Si una recta es paralela á una plano y por dos puntos de aquélla se trazan dos paralelas que corten al segundo, los segmentos de las paralelas comprendidos entre la recta y plano paralelos son iguales. (Párrafos 487 al 495.)

Pirámides.—Propiedades de la pirámide en general.—Teorema: Cortando una pirámide por un plano paralelo al de la base, se verifica: 1.° Las aristas laterales, la altura y demás rectas trazadas desde el vértice hasta la base, quedan cortadas en partes proporcionales.—2.° La sección será un polígono semejante al de la base. 3.° Estos dos polígonos tendrán sus áreas proporcionales á los cuadrados de sus distancias al vértice.—Escolio: Cuándo la pirámide propuesta es regular.—Teorema: Si dos pirámides de igual altura se cortan por planos paralelos á las bases y que disten lo mismo de los dos vértices, los polígonos secciones son proporcionales á las bases.—Corolario: Caso en que las dos bases son equivalentes. (Párrafos 722 al 726.)

Problema.—Construir un triángulo esférico, dados los tres lados. (Párrafo 707, caso 1.°)

PAPELETA 5.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Perpendiculares y oblicuas.*—Teorema: Por un punto fuera de una recta siempre se puede trazar á ésta una perpendicular, y sólo una.—

Propiedades relativas á las oblicuas.—Teorema: Si desde un punto exterior á una recta se le trazan una perpendicular y varias oblicuas, se verifica: 1.° La perpendicular es más corta que cualquiera de las oblicuas.—2.° Dos oblicuas cuyos pies equidisten del de la perpendicular, son iguales.—3.° Entre dos oblicuas cualesquiera, aquella cuyo pie diste más del de la perpendicular es la mayor.—*Recíprocamente*: Si desde un punto exterior á una recta se trazan otras varias que la corten. 1.°, 2.° 3.°—Escolios: 1.° La perpendicular trazada desde un punto á una recta, es la línea más corta que se le puede trazar desde dicho punto.—2.° Si desde un punto se trazan la perpendicular y una oblicua á una recta cualquiera, la perpendicular queda siempre del lado del ángulo agudo formado por la oblicua con dicha recta.—3.° Oblicuas iguales que pueden trazarse desde un punto á una recta cualquiera.—Observación respecto á las proposiciones recíprocas. (Párrafos 21 al 28.)

Compás de reducción.—Escalas.—Escala numérica.—Escala gráfica.—Escala de transversales ó de mil partes. (Párrafos 324 al 329.)

Problemas.—Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas.—Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas y un segmento $x = \frac{abcd}{a'b'c'}$. Transformar un triángulo en otro equivalente que tenga su base en la dirección del dado, y por vértice opuesto un punto conocido. (Párrafos 307 al 310 y 445.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Planos paralelos.*—Teorema: Si dos planos son paralelos, toda recta que corte á uno de ellos corta también al otro, y todo plano que corte á uno corta también al otro, siendo en este caso las intersecciones dos rectas paralelas.—Corolario: 1.° Si dos planos son paralelos, toda recta paralela á uno de ellos ó contenida en él, es paralela al otro ó está situada en el mismo.—2.° Si dos planos son paralelos, todo plano paralelo á uno de ellos lo es también al otro ó coincide con él.—3.° Si se tienen dos planos paralelos, y por un punto de uno de ellos se trazan paralelas al otro, todas estas rectas estarán contenidas en el primero.—4.° Por un punto del espacio se puede siempre trazar un plano paralelo á otro y solamente uno; y si dos rectas que se cortan son paralelas á un plano, es paralelo á este mismo el determinado por aquéllas.—Teorema: Por dos rectas que se cruzan puede siempre pasar un sistema de dos planos paralelos y nada más que uno.—Corolarios: 1.° Dadas dos rectas que se cruzan, existe una infinidad de planos que les son paralelos, pero la dirección de estos planos es única.—2.° Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos, tienen sus planos también paralelos.—Teorema: Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos, son iguales si dichos lados están dirigidos en el mismo ó en contrario sentido, y suplementarios, si dos lados están en el primer caso y los otros dos en el segundo.—Teorema: Los segmentos de dos paralelas comprendidos por dos planos paralelos son iguales.—Teorema: Tres planos paralelos cortan á dos rectas cualesquiera en partes proporcionales.—Estudiar la recíproca, añadiendo la condición de que dichos planos han de ser paralelos.—Corolarios: 1.° Caso en que haya más de dos rectas.—2.° Si todas ó cierto número de ellas partiesen de un punto. (Párrafos 495 al 505.)

Prisma.—Definiciones: Prisma; caras laterales; bases; alturas; tronco de prisma; forma en que puede considerarse engendrada la superficie lateral de un prisma; cilindros inscripto y circunscripto á un prisma regular.—Propiedades del paralelepípedo.—Clasificación.—Teorema: En todo paralelepípedo se verifica: 1.° Las caras opuestas son iguales y paralelas.—2.° Los triedros opuestos son simétricos.—3.° Las diagonales se cortan en un mismo punto y en partes iguales.—4.° Toda recta que pase por este punto y se limite en la superficie del poliedro, queda dividida en partes iguales por dicho punto.—Corolarios: 1.° Dos caras opuestas cualesquiera pueden ser consideradas como bases.—2.° Todo plano que corte á cuatro aristas paralelas de un paralelepípedo, lo verifica según un paralelogramo.—3.° Un paralelepípedo queda determinado, conocido un triedro y la longitud de las tres aristas que lo forman.—4.° Las cuatro diagonales de un paralelepípedo rectángulo son iguales.—Teorema: En un paralelepípedo rectángulo, el cuadrado de la diagonal es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren en un mismo vértice.—Corolario: En un cubo.—*Propiedades de un prisma.*—Teorema: Las secciones causadas en un prisma por planos paralelos son polígonos iguales.—Corolario: Sección de un plano paralelo á las bases.—Escolio: Sección recta. (Párrafos 726 al 737.)

Problemas.—Construir un triángulo esférico, dados dos lados y el ángulo comprendido, y cuando se dé un lado y dos ángulos adyacentes al lado. (Párrafo 707, caso 2.º)

PAPELETA 6.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Lugares geométricos.*—Teorema: Si se traza la perpendicular á una recta en su punto medio, cualquier punto de dicha perpendicular equidista de los extremos de la recta, y todo punto fuera de la perpendicular dista desigualmente de los mismos extremos. Recíprocas.—Definición de lugar geométrico.—Teorema: La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de los lados de dicho ángulo.—Corolario: Lugar geométrico de todos los puntos de un plano equidistantes de dos rectas trazadas en dicho plano y que se corten.—Observación: Proposiciones que hay que demostrar para establecer un lugar geométrico. (Párrafos 28 al 34.)

Polígonos regulares convexos.—Generalidades: Prueba de la existencia de estos polígonos; línea quebrada regular; polígono regular inscripto y circunscripto de igual número de lados.—Teorema: Al perímetro de todo polígono regular se le puede circunscribir ó inscribir una circunferencia. -Escolios: 1.º Centro, radio y apotema.—2.º Angulos en el centro.—Observación.—Sector poligonal regular. Teorema: Los polígonos regulares de igual número de lados son semejantes y sus lados proporcionales á sus radios y apotemas.—*Polígonos regulares estrellados.*—Definición ó idea general de su existencia: Cualidades que los caracterizan.—Género y especie. (Párrafos 329 al 339.)

Problemas.—Calcular la longitud de una circunferencia en función de su radio.—Calcular el radio de una circunferencia en función de la longitud de ésta. (Párrafo 381, en los casos 1.º y 2.º)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Posiciones relativas de rectas y planos.*—Rectas y planos perpendiculares.—Definición.—Teorema: Si una recta es perpendicular á otras dos no paralelas entre sí, pero paralelas á un plano ó situadas en él, será también perpendicular á todas las demás que estén en las mismas condiciones y, por lo tanto, será perpendicular al plano.—Escolio: Averiguar si una recta es perpendicular á un plano.—Teorema: Si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular á una de ellas lo es también á la otra; y si dos planos son paralelos, toda perpendicular á uno lo es también al otro.—Recíprocamente.—Teorema: Por un punto dado se puede siempre trazar un plano perpendicular á una recta y nada más que una.—Teorema: Por un punto se puede siempre trazar una perpendicular á un plano y nada más que una.—Teorema: Si se tiene un plano y una recta perpendiculares á otra recta dada, aquella recta es paralela al plano ó está situada en él.—Corolarios: 1.º Si á una recta se traza un plano perpendicular en uno de sus puntos ó por un punto exterior, este plano será el lugar geométrico de todas las perpendiculares trazadas á la recta por el punto considerado. 2.º El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los extremos de una recta es el plano perpendicular á ésta en su punto medio.—Teorema: Si desde un punto exterior á un plano se trazan á éste una perpendicular y varias oblicuas, se verifica: 1.º, 2.º y 3.º—Recíprocamente. (Párrafos 505 al 517.)

Problema.—Construir un triángulo esférico conociendo dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.—Discutiendo los distintos casos que pueden presentarse. (Párrafo 707, caso 3.º)

PAPELETA 7.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Paralelas.*—Definición.—Propiedades.—Teorema: Por un punto fuera de una recta puede siempre trazársele una paralela.—Principio fundamental.—Corolario 1.º Si una recta encuentra á otra, encuentra á sus paralelas.—Corolario 2.º Si una, recta corta perpendicularmente á otra es también perpendicular á sus paralelas.—Corolario 3.º Si una recta es paralela á otra, lo es también á las paralelas á ésta.—Paralelas cortadas por secantes.—Definiciones de los diversos ángulos que se forman.—Teorema: Si una secante corta á dos paralelas, los cuatro ángulos agudos que resultan en los dos puntos de intersección son iguales, así como los cuatro ángulos obtusos.—Recíproca: Si dos rectas son cortadas por una secante y forman cuatro ángulos agudos ú obtusos iguales entre sí, las rectas son paralelas siempre que los internos ó externos del mismo lado de la secante sean de distinta especie. Caso en que los ángulos son rectos.—Corolarios: 1.º Si las rectas son paralelas los ángulos alternos internos son iguales.—2.º Los alternos externos son iguales.—3.º Los correspondientes son iguales.—4.º Los internos de un mismo lado de la secante son suplementarios.—5.º Los externos del mismo lado de la secante son suplementarios.—6.º Recíprocamente.—Dos rectas cortadas por una secante son paralelas cuando son iguales los ángulos alternos internos, ó los alternos externos, ó los correspondientes, ó bien si son suplementarios los ángulos del mismo lado de la secante, internos ó externos.—Escolio: Si dos rectas cortadas por una secante forman ángulos internos de un mismo lado, que no sean suplementarios, dichas rectas se cortan por el lado en que la suma de los ángulos es menor que dos rectos.—Consecuencias: 1.ª Si se traza una perpendicular y una oblicua á una recta, ambas se cortan por el lado del ángulo agudo.—2.ª Si se trazan dos perpendiculares á dos rectas que se corten, dichas perpendiculares se han de cortar también.—Teorema: Los segmentos de paralelas comprendidos entre otras dos paralelas, son iguales.—Corolario: Dos rectas paralelas equidistan en toda su extensión. Párrafos 34 al 46.)

Medida de la circunferencia.—Principio general que sirve de base para hallar la medida de la circunferencia.—Deducciones que se desprenden de dicho principio: 1.ª Límite común á la apotema del polígono regular inscrito y al radio del circunscrito, cuando aumenta el número de lados.—2.ª Extensión de las propiedades de los polígonos.—3.ª Aplicación de los dos anteriores á un arco ó á una línea quebrada regular.—Teorema: Las longitudes de dos circunferencias están en la relación de los radios de las mismas.—Corolarios: 1.º Relativo á la correspondencia de las longitudes de las circunferencias con las de sus radios.—2.º Relación entre los arcos semejantes y sus radios.—Longitud de la circunferencia.—Teorema: La relación entre la longitud de una circunferencia cualquiera y la de su diámetro, es constante.—Corolario: Valor del radio en función de la circunferencia y viceversa.—Escolio: Valores hallados para π por Arquímides, ad. Metio y Ptolomeo. (Párrafos 372 al 379.)

Problemas.—Construir la media proporcional á dos rectas dadas, demostrando que la media geométrica es menor que la media aritmética.—Transformar un polígono en un triángulo equivalente. (Párrafos 310, 311 y 449.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—Planos perpendiculares.—Definición.—Teorema: Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por esta recta, ó le sea paralelo, será perpendicular al primero.—Corolarios: 1.º Planos perpendiculares que se pueden trazar á otro por una recta que le sea perpendicular ú oblicua.—2.º Si la recta está en el plano ó es paralela al mismo.—Escolios: 1.º Consecuencia de estos corolarios y de la definición; lugar geométrico de las perpendiculares trazadas á un plano por los distintos puntos de una recta.—2.º Si varios planos son paralelos, todo plano perpendicular á uno de ellos, lo es también á los demás. Teorema: Si dos planos son perpendiculares, toda perpendicular á uno de ellos está situada en el otro ó le es paralela.—Teorema: Si dos planos son perpendiculares, y en uno de ellos se traza una perpendicular á su intersección con el otro, será perpendicular también á este último.—Teorema: La intersección de dos planos perpendiculares á un tercero es perpendicular á este último.—Corolarios: 1.º Si dos planos son perpendiculares á un tercero, la intersección de aquéllos lo es también á las intersecciones que producen los mismos sobre dicho tercero. 2.º Si tres planos son perpendiculares de dos en dos, la intersección de dos cualesquiera de ellos es perpendicular al tercero, y las tres intersecciones lo son entre sí.—Horizontales y verticales. (Párrafos 517 al 528.)

Poliedros en general: Propiedades.—Teorema: En todo poliedro convexo se verifica que el número de sus caras, más el de vértices, excede al de aristas en dos unidades.—Lema: En todos los poliedros abiertos que provengan de uno mismo convexo, se verifica: 1.º El número de caras, más el de vértices, menos el de aristas, es igual á una cantidad constante.—2.º Esta constante es igual á la unidad. (Párrafo 737.)

Problemas.—Dados un punto y un arco de círculo máximo en una superficie esférica, trazar por el primero el arco de círculo máximo perpendicular al segundo. (Párrafo 703.)

PAPELETA 8.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Angulos de lados paralelos ó perpendiculares.*—Teorema: Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos, son iguales, si tienen los lados paralelos dirigidos en el mismo ó en opuesto sentido, y suplementarios si dos de sus lados están en el mismo sentido y los otros dos en opuesto.—Corolario: Dos ángulos cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios, según sean de la misma ó diferente especie.—Observaciones sobre el paralelismo de dos rectas: 1.ª Cuando la secante gira, disminuyendo el ángulo que forma con la paralela.—2.ª Magnitud de las secantes sucesivas.—Consecuencia

Dos rectas paralelas pueden considerarse como dos rectas que se cortan en el infinito, formando un ángulo igual á cero.—Observación sobre proposiciones recíprocas. (Párrafos 46 al 50.)

Medida de la circunferencia.—Consideraciones que manifiestan la dificultad de medir una curva con una unidad lineal recta, conduciendo á tomar para longitud de la curva el límite de la longitud de una quebrada inscrita, cuyo número de lados aumenta, tendiendo á cero cada uno de ellos.—Teorema: La longitud del perímetro de una línea quebrada inscrita en una curva, cuyos lados tienden hacia cero, aumentando el número de éstos indefinidamente, tiende á ser igual á la longitud de la curva, llegando á serlo en el citado límite, y esto independientemente de la naturaleza de la línea inscrita y de la ley ó condiciones según las cuales aumenta el número de lados y tiende á cero cada uno de ellos.—Lema: Dadas una curva plana, convexa, una línea quebrada inscrita cualquiera y la circunscrita correspondiente, terminadas en los extremos de la curva, las longitudes de los perímetros de estas dos líneas tienden á ser iguales cuando los lados de la inscrita tienden hacia cero, aumentando su número, cualquiera que sea el modo como lo verifiquen.—Corolario y demostración del teorema. (Párrafos 363 al 371.)

Problemas.—Hallar geométricamente dos segmentos de recta cuya suma y producto sean conocidos.—Transformar un triángulo en un cuadrado equivalente. (Párrafos 312 y 448.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Proyecciones, ángulos y mínimas distancias.*—Proyecciones.—Definiciones: Proyección octogonal; ídem oblicua; línea proyectante; plano de proyección.—Teorema: La proyección de una recta sobre un plano, es otra recta.—Corolarios: 1.º Si la recta es perpendicular al plano.—2.º Si es paralela á la dirección de la proyectante en la proyección oblicua.—3.º Si es limitada y paralela al plano de proyección.—4.º Para una recta cualquiera limitada, la proyección octogonal es menor que la recta.—5.º Para obtener la proyección de una recta, basta obtener la de dos de sus puntos y unirlos por una recta.—Escolio: La determinación de la recta, conocida la proyección.—Teorema: Las proyecciones de dos rectas paralelas sobre un plano, son paralelas.—Recíproca: Condiciones que hay que agregar para que ésta pueda ser cierta. (Párrafos 528 al 534.)

Poliedros en general. — Teorema: No pueden existir más que cinco géneros de pliedros convexos, cuyas caras sean todas polígonos de igual número de lados y sus ángulos poliedros tengan todos el mismo número de aristas.—Teorema: La suma de los ángulos de todas las caras de un poliedro convexo, es igual á cuatro veces el número de vértices disminuído en dos unidades.—Teorema: Todo poliedro convexo puede descomponerse en tetraedros.—Escolio: Tetraedros interiores y exteriores.—Estudio comparativo del número de caras vértices y aristas de los poliedros regulares para deducir los conjugados. (Párrafos 738 al 742 y 744.)

Problemas.—Por un punto trazar una recta paralela á un plano.—Por un punto trazar un plano paralelo á una recta.—Por un punto trazar un plano paralelo á otro dado. (Párrafos 545 al 548.)

PAPELETA 9.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Polígonos.*—Definiciones: Polígonos, lados, perímetro, vértices, ángulos, diagonales, polígonos convexos y cóncavos, equiláteros, equiángulos, regulares, irregulares; clasificación de los polígonos por el número de lados.— *Triángulos.* —Clasificación: Por sus lados, por sus ángulos, base, altura, catetos, hipotenusa; designación de lados y ángulos.—Propiedades.—Teorema: En todo triángulo, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia; condición para formar un triángulo con tres rectas dadas.—Corolario: Si dos triángulos tienen un lado común y un lado del primero corta á un lado del segundo, la suma de los lados que no se cortan es menor que la de los que se cortan.—Teorema: Si en un triángulo disminuye ó aumenta un ángulo, permaneciendo constantes los lados que lo forman, el lado opuesto disminuye ó aumenta también. — Corolario 1.º Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales á dos del otro, el tercer lado del primero será mayor ó menor que el tercer lado del segundo, según que el ángulo opuesto á aquél sea mayor ó menor que el opuesto á éste.—Corolario 2.º Si dichos ángulos fuesen iguales, los terceros lados deberían serlo.—Recíprocos del teorema y corolarios anteriores.—Teorema: En todo triángulo se verifica, que si un lado es mayor, igual ó menor que otro, el ángulo opuesto al primero estará en las mismas circunstancias respecto al opuesto al segundo.—Corolario: Si el triángulo es isósceles, á lados iguales se oponen ángulos iguales, y si es equilátero es también equiángulo. Recíprocos del teorema y corolario.—Escolio: Propiedades de que goza la altura de un triángulo isósceles.—Teorema: La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.—Corolarios: 1.º Un ángulo cualquiera de un triángulo es el suplemento de la suma de los otros dos.—2.º Si un triángulo tiene dos ángulos respectivamente iguales á dos ángulos de otro triángulo, los terceros ángulos son también iguales.—3.º Cualquier ángulo externo de un triángulo, es igual á la suma de los dos que no le son adyacentes.—4.º Un triángulo sólo puede tener un ángulo recto ú obtuso.—5.º En un triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios.—6.º Dos triángulos cuyos lados sean respectivamente paralelos ó perpendiculares, tienen sus ángulos respectivamente iguales. (Párrafos 50 al 66.)

Medida de la circunferencia.—Escolios que se derivan de la relación que liga la longitud de las líneas quebradas inscrita y circunscrita á una curva convexa, suponiendo invariable la longitud de la curva.—Consecuencias que se deducen: 1.ª Longitud de una quebrada inscrita á una curva, y cuyo número de lados aumenta.—2.ª Idem de una circunscrita.—3.ª Tránsito de los perímetros de las inscritas á las circunscritas.—4.ª Cómo puede considerarse una curva y nueva definición de tangente.—5.ª Una curva convexa es menor que una quebrada que la envuelva y mayor que otra á que envuelve, teniendo todos los mismos extremos.—6.ª Relación entre tres curvas que se envuelvan, teniendo iguales extremos.—7.ª Relación entre una curva convexa cerrada y otra que la envuelva.—8.ª Relación entre un arco convexo y su cuerda. (Párrafo 371.)

Problema.— Dividir geométricamente una recta en media y extrema razón.—Escolio: Valores de los segmentos en función de la recta. (Párrafos 314 y 315.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Proyecciones.*—Teorema: Si dos rectas son perpendiculares y una de ellas es paralela á un plano, las proyecciones octogonales de ambas sobre este plano son también perpendiculares.—Recíproco.—Escolio: Teorema de las tres perpendiculares.—Teorema: Si una recta es perpendicular á un plano, la proyección de la primera sobre un cierto plano es perpendicular á la traza del plano dado sobre el de proyección. La recíproca no es cierta.—Condiciones para que la recta sea perpendicular al plano. (Párrafos 534 al 537.)

Poliedros regulares convexos.—Sólo pueden existir cinco clases de poliedros regulares convexos.—Comprobar su existencia, construyendo el tetraedro, el exaedro ó cubo y el octaedro. (Párrafos 742 y 743.)

Problemas.—Por una recta, trazar el plano paralelo á otra recta dada.—Por dos rectas que se cruzan, hacer pasar dos planos paralelos. (Párrafos 548 y 549.)

PAPELETA 10.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Propiedades de los triángulos.*—Teorema: En todo triángulo se verifica que las perpendiculares trazadas á los lados en sus puntos medios, se cortan en un mismo punto, que equidista, por consiguiente, de los tres vértices.—Corolario: En un triángulo rectángulo, el punto equidistante de los tres vértices es el punto medio de la hipotenusa.— Teorema: En todo triángulo se verifica que las tres alturas se cortan en un mismo punto.—Corolario: Si el triángulo es rectángulo, las alturas se cortan en el vértice del ángulo recto.—Teorema: En todo triángulo las bisectrices de sus tres ángulos se cortan en un mismo punto, que equidista, por consiguiente, de los tres lados.—Corolario: En un triángulo equilátero el punto equidistante de los vértices, el de intersección de las alturas y el de las bisectrices coinciden en uno solo.—Escolio: Considerar prolongados más allá de los vértices los tres lados del triángulo y determinar los puntos que equidistan de las tres rectas. (Párrafos 66 al 73.)

Medida de la circunferencia.—Rectificación de la circunferencia.—Fórmula que da la longitud de un arco.—Relación de la circunferencia al diámetro.—Método de los perímetros: Primer procedimiento: $R = I$; Segundo procedimiento: $R = \frac{I}{2}$ (Párrafos 379, primera cuestión del 380 y los 382 á 387.)

Problemas.—Dada una recta y un punto fuera de ella, trazar por éste otra recta que forme con la dada un ángulo conocido.—Construir un cuadrado equivalente á un círculo dado. (Párrafos 190 y 453.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Angulos de rectas y planos.*—Consideraciones y definiciones.—Teorema: Por un punto dado en un plano, la recta que se trace en él formando el mayor ángulo posible con otro plano, es perpendicular á la traza del primero sobre el segundo.—Escolio: Línea de máxima pendiente.—Mínimas distancias. — Consideraciones.— *Mínima distancia:* 1.º De un punto á un plano.—2.º Entre una recta y un plano paralelos. 3.º Entre dos planos paralelos.—4.º Entre dos rectas que se cruzan.—Teorema: Dadas dos rectas que se cruzan, existe siempre una recta, y sólo una, que es perpendicular á ambas.—Escolio: Cuando sólo se desea la longitud de la mínima distancia. (Párrafos 537 al 545.)

Poliedros regulares convexos. — Construir el dodecaedro y el icosaedro. (Párrafo 743.)

Problema.—Por un punto trazar la recta perpendicular á un plano, procedimiento según que el punto esté fuera del plano ó en el plano. (Párrafo 550.)

PAPELETA 11.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Igualdad de triángulos.*—Teorema: Dos triángulos son iguales en cualquiera de los tres casos siguientes: 1.° Cuando dos lados y el ángulo comprendido en uno de los triángulos son, respectivamente, iguales á dos lados y el ángulo comprendido en el otro.—2.° Cuando tienen análogamente iguales un lado y dos ángulos, estando dispuestos del mismo modo.—3.° Cuando son iguales los tres lados del uno ó los tres del otro.—Corolarios: 1.° Condiciones suficientes para que sean iguales dos triángulos isósceles.—2.° Idem para la igualdad de los equiláteros. 3.° Idem para la de los rectángulos.—Escolio: Elementos iguales que deben tener dos triángulos para poder deducir la igualdad de éstos.—*Nuevas propiedades de los triángulos.*—Teorema: La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado é igual á su mitad.—Teorema: En todo triángulo las tres medianas se cortan en un mismo punto, que se encuentra en cada una de ellas á la tercera parte desde el lado ó á las dos terceras partes desde el vértice.—Corolario: En un triángulo equilátero, este punto coincide con el que equidista de los vértices y de los lados, y es común á las tres alturas.—Teorema: En todo triángulo, el punto equidistante de los tres vértices, el común á las tres medianas y el de concurso de las tres alturas, están en línea recta, y la distancia del primero de estos puntos al segundo es la mitad de la de éste al tercero. (Párrafos 73 al 82.)

Areas. — Definiciones: áreas; figuras equivalentes; iguales y semejantes; medida de las superficies. — *Determinación de las áreas.*—En las figuras rectilíneas. Teorema: Si dos rectángulos de la misma base tienen alturas iguales, son iguales; si un rectángulo tiene la misma base que otros dos y su altura es igual á la suma de las de éstos, el primer rectángulo es igual á la suma de los segundos.—Corolarios: 1.° Dos rectángulos que tengan bases iguales, son proporcionales á sus alturas.—2.° Dos rectángulos de alturas iguales son proporcionales á sus bases. 3.° Todo rectángulo es proporcional á su base y á su altura.—4.° La relación de las áreas de dos rectángulos es igual á la relación de los productos de los números que miden sus respectivas bases y alturas.—Escolio: Dimensiones de un rectángulo.—Teorema: El área de un rectángulo es igual al producto del número que mide su base por el que mide su altura. Corolario: Area de un cuadrado.—Teorema: Area de un paralelogramo.—Teorema: área de un triángulo; hallar esta área en función del lado, cuando el triángulo es equilátero. (Párrafos 389 al 399.)

Problemas.—Dada una recta y un punto, trazar por éste una paralela á aquélla. Trazar una perpendicular á una recta desde un punto fuera de ella. (Párrafos 186 al 188.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Angulos diedros.* — Definiciones. — Diedro, caras, aristas, diedros adyacentes, ídem opuestos por la arista, plano bisector —*Angulo rectilíneo correspondiente á un diedro.*—Teorema: Si dos ángulos diedros son iguales, lo son también los rectilíneos correspondientes. — Recíproca. — Magnitud de un diedro.—Comparación con el rectilíneo correspondiente. — Clasificación. — Consecuencias: 1.ª Si un diedro es recto ....—2.ª Si el rectilíneo correspondiente á un diedro es recto ....—3.ª Todos los diedros rectos son ....—4.ª Si dos diedros adyacentes tienen las caras no comunes en prolongación .... — 5.ª Los diedros opuestos por la arista ...; y 6.ª Todos los diedros sucesivos que forman varios planos que pasan por una recta...—*Medida de los diedros.*—Teorema: Dos ángulos diedros son proporcionales á sus rectilíneos correspondientes.—Corolario: Todo diedro tiene por medida la del rectilíneo correspondiente.—Escolio: Expresión de la medida de un diedro.—Observación: La correspondencia entre los ángulos diedros y los rectilíneos permite aplicarles varias propiedades de los ángulos, cuales son ... (Párrafos 558 al 569.)

Poliedros regulares.—Esfera inscrita y circunscrita á los poliedros regulares.—Teorema: Todo poliedro regular convexo es inscriptible y circunscriptible á una superficie esférica.—Escolio: Descomposición de un poliedro regular en pirámides regulares é iguales. (Párrafos 745 y 746.)

Problema.—Hallar el radio de una esfera sólida. (Párrafos 700 y 701.)

PAPELETA 12.ª

GEOMETRÍA PLANA. — *Cuadriláteros.* — Clasificación.— Propiedades. — Teorema: En todo paralelogramo se verifica: 1.° Los lados opuestos son iguales; 2.° Los ángulos opuestos, también; 3.° Los ángulos que tienen un lado común son suplementarios, y 4.° Las diagonales se cortan en dos partes iguales.—Teorema: Un cuadrilátero convexo es paralelogramo si se verifica una de las cinco condiciones siguientes: 1.ª Tener los lados opuestos iguales; 2.ª Tener los ángulos opuestos iguales; 3.ª Ser iguales y paralelos los lados opuestos; 4.ª Cortarse las diagonales en su punto medio, y 5.ª Ser suplementarios los ángulos que tienen un lado común.—Teorema: En el rombo, además de las propiedades del paralelogramo, se verifica que las diagonales son perpendiculares ó bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen. Recíprocamente: Si en un paralelogramo las diagonales son perpendiculares ó bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen la figura, es un rombo.—Teorema: El rectángulo, además de las propiedades del paralelogramo, tiene iguales las diagonales.—Recíprocamente: Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, la figura es un rectángulo.—Escolio: Propiedades de las diagonales de un cuadrado, por ser éste, á la vez, rectángulo y rombo.—Teorema: En todo trapecio la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos es paralela á las bases; la parte de dicha recta comprendida entre aquellos lados es igual á la semisuma de éstas, y la parte comprendida entre las diagonales, es igual á la semidiferencia de las mismas bases.—Base media.—Igualdad de paralelogramos.—Teorema: Dos paralelogramos son iguales cuando dos lados y el ángulo comprendido en uno de ellos son iguales á los mismos elementos del otro; dos rectángulos, cuando son respectivamente iguales los dos lados contiguos; dos rombos, si tienen iguales un lado y un ángulo; y dos cuadrados si tienen igual lado. (Párrafos 82 al 92.)

Areas.—Teorema: El área de un trapecio es igual al producto de la altura por la semisuma de las bases.—Teorema: El área de un polígono regular convexo es igual á la mitad del producto de la longitud de perímetro por la apotema.—Area del sector poligonal regular.—Escolio: Area del triángulo equilátero y demás polígonos regulares en función del lado.—Area de un polígono cualquiera. (Párrafos 401, 402, 404 y 405.)

Problemas.—Dada una recta y en ella un punto, trazar por éste otra recta que forme con la dada un ángulo conocido. Transformar un triángulo dado en otro equivalente é isósceles, conservando uno de sus ángulos. (Párrafos 189 y 446.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.— *Angulos poliedros.*—Definiciones: Aristas, vértice, caras, ángulo plano, plano diagonal, ángulos poliedros, cóncavos y convexos, caracteres distintivos de unos y otros.—Demostrar que puede hallarse siempre un plano que corte á todas las aristas de un ángulo poliedro convexo, siendo también convexo el polígono resultante.—Clasificación de los ángulos poliedros, según el número de sus caras.—Definición de ángulos poliedros regulares. (Párrafos 569 á 574.)

Poliedros regulares conjugados.—Teorema: Los centros de las caras de un poliedro regular son los vértices de otro poliedro regular, conjugado con el primero.—Escolio: Razón de la calificación de conjugados que se da á los poliedros regulares. (Párrafos 747 y 748).

Problema.—Dados dos puntos en la superficie de una esfera, hacer pasar por ellos una circunferencia de círculo máximo. (Párrafo 702.)

PAPELETA 13.ª

GEOMETRIA PLANA.—Polígonos en general. — Teorema: El número de diagonales de un polígono es igual á $\frac{n(n-3)}{2}$ siendo n el número de lados.—Teorema: En todo polígono convexo la suma de sus ángulos internos es igual á tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene, menos cuatro rectos, ó á tantas veces dos rectos como lados tiene, menos dos.—Escolio: Descomposición de un polígono en triángulos partiendo de un punto interior, en un lado ó en un vértice.—Teorema: Si se prolongan en el mismo sentido todos los lados de un polígono convexo, la suma de los ángulos externos que resultan es igual á cuatro ángulos rectos. Corolario: No existe ningún polígono convexo con más de tres ángulos internos que sean agudos. (Párrafos 92 al 97.)

Areas.—En las figuras mixtilíneas.—Fórmula de Sipson.—En el círculo.—Teorema: El área de un círculo es igual...—Corolario: En función del diámetro y en función de la circunferencia.—Teorema: El área de un sector es igual á la mitad del producto de su arco por el radio. Comparación de las áreas de un círculo y de un sector del mismo radio.—Teorema: El área de un segmento circular es igual al producto de la mitad del radio por la diferencia entre su arco y la mitad de la cuerda del arco doble. (Párrafos 406, 407 y 409 al 415.)

Problemas.—Construir un polígono semejante á otro dado sobre una recta dada, ó conocida la relación de semejanza $\frac{m}{n}$. Transformar un triángulo en otro equivalente y equilátero (Párrafos 321 y 447.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO. — *Angulos diedros.* — Definiciones. — Diedro, caras, aristas, diedros adyacentes, ídem opuestos por la arista, plano bisector.—*Angulo rectilíneo correspondiente á un diedro.*—Teorema: Si dos ángulos diedros son iguales, lo son también los rectilíneos correspondientes. — Ricíproca. — Magnitud de un diedro.—Comparación con el rectilíneo correspondiente. — Clasificación.—Consecuencias: 1.ª Si un diedro es recto...—2.ª Si el rectilíneo correspondiente á un diedro es factor...—3.ª Todos los diedros rectos son...—4.ª Si los diedros adyacentes, tienen las caras no comunes en un mismo plano...—5.ª Los diedros opuestos por la arista..., y 6.ª Todos los diedros sucesivos que forman varios planos que pasan por una recta..—*Medida de los diedros.*—Teorema: Dos ángulos diedros son proporcionales á sus rectilíneos correspondientes.—Corolario: Todo diedro tiene por medida la del rectilíneo correspondiente.—Escolio: Expresión de la medida de un diedro.— Observación: La correspondencia entre los ángulos diedros y los rectilíneos, permite aplicarles varias propiedades de los ángulos cuales son... (Párrafos 558 al 569.)

Comparación de los cuerpos por su magnitud, forma y posición.—Igualdad.—Generalidades. — *Igualdad de poliedros.* — Teorema: Dos tetraedros son iguales cuando tienen iguales y dispuestos de la misma manera: 1.° Un diedro y los dos triángulos que lo forman.—2.° Una cara y los tres diedros adyacentes.—3.° Sus aristas.—Teorema: Dos pirámides son iguales cuando tienen iguales un ángulo triedro formado por la base y dos caras laterales, además de serlo estos polígonos y estar dispuestos de la misma manera. Escolio: Dos pirámides regulares son iguales, si tienen iguales bases y alturas. Teorema: Dos prismas son iguales cuando las tres caras que forman un triedro en el primero son iguales á las tres que forman otro triedro en el segundo, estan do semejantemente colocadas. — Escolio: 1.° Dos prismas rectos son iguales si lo son sus bases y alturas.—2.° Dos paralelepípedos rectángulos si tienen sus aristas iguales.— 3.° Dos cubos...— 4.° Dos troncos de prisma recto, cuando tienen iguales bases ó iguales de dos en dos y dispuestas del mismo modo las aristas laterales.—Teorema: Dos poliedros son iguales cuando se componen de igual número de tetraedros iguales é igualmente dispuestos. (Párrafos 757 al 766.)

Problema.—Trazar un arco de círculo máximo perpendicular á otro dado en su punto medio, ó sea, dividir en dos partes iguales un arco de círculo máximo. (Párrafo 704.)

PAPELETA 14.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Igualdad de polígonos.*—Consideraciones que inducen á determinar la igualdad de dos polígonos con el menor número de condiciones posible.—Dos polígonos de igual número de lados son iguales en cualquiera de los casos siguientes.—1.° Si tienen de dos en dos iguales todos los lados menos uno y todos los ángulos formados por lados iguales.—2.° Si todos los ángulos menos uno, y todos los lados menos los que forman el ángulo exceptuado, si son iguales de dos en dos, en ambos polígonos.—3.° Si tienen iguales todos los lados y todos los ángulos, menos dos consecutivos.—4.° Si tienen un lado igual é iguales de dos en dos las distancias de todos los vértices á los extremos de dichos lados.—5.° Si se componen del mismo número de triángulos iguales de dos en dos é igualmente dispuestos en cada polígono.— Escolio: Número de condiciones para determinar la igualdad de los polígonos. (Párrafos 97 al 100.)

Comparación de áreas.—Consecuencias que se deducen al comparar las áreas de dos paralelogramos ó de dos triángulos: 1.° Dos paralelogramos ó dos triángulos de la misma base y de la misma altura son equivalentes.—2.° Las áreas de dos paralelogramos ó de dos triángulos son entre sí, como los productos de...—Teorema: Si dos triángulos tienen dos ángulos (uno de cada triángulo) iguales ó suplementarios, la relación de sus áreas es igual á la relación de los productos de los números que miden los dos lados que forman cada uno de los expresados ángulos. (Párrafos 415 al 417.)

Problemas.—Dado el radio y la amplitud de un arco, calcular su longitud.—Hallar la amplitud de un arco cuya longitud sea igual al radio.—Dada la longitud y amplitud de un arco hallar la longitud de su radio. (Párrafo 381 en los casos 3.°, 4.° y 5.°)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO. — *Angulo triedro.*—Definiciones: Triedro simétrico. Caso de coincidencia de los triedros simétricos. — Triedros suplementarios. — Teorema: Si un triedro es suplementario de otro, éste lo es de aquél.—Teorema: En dos triedros suplementarios, cada diedro en uno de ellos es el suplemento de la cara correspondiente del otro.—Escolio: Propiedad correlativa ó suplementaria. (Párrafos 574 al 583.)

Simetría.—Definiciones: Simetría respecto á un centro, á un eje y á un plano; figuras simétricas; orientación.— Simetría respecto á un eje.—Teorema: Dos figuras simétricas respecto á un eje, son iguales.—Corolario: En un poliedro simétrico respecto á un eje, se verifica: 1.° Toda recta que corte al eje perpendicularmente y se limite en la superficie del poliedro, queda dividida por dicho eje en dos partes iguales.—2.° Todo plano que pase por el eje produce una sección simétrica respecto al mismo eje.—3.° Todo plano trazado por el eje corta al poliedro en dos partes iguales.—4.° Todo plano perpendicular al eje produce una sección, de la cual es centro de simetría la intersección del plano con el eje.—Escolio: 1.° Son ejes de simetría: En un prisma recto cuyas bases sean simétricas respecto á un punto, la recta que une esos puntos; en un paralelepípedo rectángulo, las tres rectas que unen los centros de las caras opuestas, y si las bases son cuadrados, las dos rectas que unen los puntos medios de las aristas laterales opuestas; el eje de una pirámide regular de número par de caras laterales.—Escolio: 2.° Simetría de posición. (Párrafos 769 al 774.)

Problema.—Construir un triángulo esférico, dados los tres ángulos. (Párrafo 707, caso 1.°

PAPELETA 15.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Simetría en los polígonos.*—Definiciones: Puntos simétricos; centro; eje; polígonos simétricos; igualdad de éstos; manera de hacerlos coincidir; simetría entre los elementos de un mismo polígono.—*Circunferencia.*—Definiciones: Circunferencia, centro, arco, radio, secante, cuerda, diámetro, tangente, normal, círculo, sector circular, arcos iguales, suma de arcos.—Propiedades que se deducen de las definiciones: 1.ª Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan ...; 2.ª Todos los radios de una circunferencia ...; 3.ª El diámetro es la mayor...; 4.ª El diámetro divide á la circunferencia y al círculo...—Teorema: Por tres puntos que no estén en línea recta se puede siempre hacer pasar una circunferencia, y sólo una.—Escolio: Puede considerarse una recta como el límite de una circunferencia cuyo radio haya ido creciendo hasta hacerse infinito. (Párrafos 100 al 111.)

Comparación de áreas.—Teorema: El cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.—Corolarios: 1.° Los cuadrados construídos sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, son proporcionales á las proyecciones de estos lados sobre la hipotenusa.—2.° Los cuadrados construídos sobre las cuerdas que parten de los extremos de un mismo diámetro, son proporcionales á las proyecciones de estas cuerdas sobre dicho diámetro. (Párrafos 417 al 419.)

Problema.—Dados dos círculos, trazar una tangente común á sus circunferencias.—Discusión.—Escolio: Las tangentes se encuentran en un mismo punto de la línea de los centros y ésta es bisectriz del ángulo que forman.—Estas tangentes son iguales. (Párrafos 211 al 214.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Angulos triedros.*—Teorema: En todo triedro una cara cualquiera es menor que la suma y mayor que la diferencia de las otras dos. Corolarios: 1.° Si tres ángulos son tales, que teniendo el vértice común uno de ellos es igual á la suma de los otros dos, las tres rectas que los forman están en un mismo plano.—2.° Si en el interior de un triedro se traza una recta cualquiera que pase por el vértice y se imaginan los ángulos planos que forma con dos aristas de una cara, la suma de estos ángulos es menor que la de las otras dos caras.— 3.° Si dos triedros tienen una cara común, y una cara del primero corta á otra cara del segundo, la suma de las caras que no se cortan es menor que la de las que se cortan.—4.° En todo triedro, á mayor ángulo diedro, se opone mayor cara.—Escolio: En todo triedro isoedro, los diedros opuestos á las caras iguales, son iguales. En todo triedro, á mayor cara se opone mayor diedro.—Si un triedro tiene las tres caras iguales, lo serán también los tres diedros, y, por consiguiente, será regular. (Párrafos 583 al 586.)

Simetría respecto á un centro ó á un plano.—Teorema: Dos figuras simétricas de una tercera con relación á dos centros distintos, son iguales.—Escolio: Una figura simétrica de otra con respecto á un centro cualquiera, tiene siempre la misma forma y magnitud é igual orientación.—Teorema: Si dos figuras son simétricas respecto á un centro, se las puede colocar de modo que sean simétricas con relación á un plano cualquiera que pase por este centro, y recíprocamente.—Corolarios: 1.° Si de una figura se determinan sus simétricas respecto á dos planos distintos, estas figuras podrán colocarse simétricamente á la primera, respecto á dos centros.—2.° Dada una figura y atendiendo sólo á la forma, no hay más que una simétrica.—Escolio: Para demostrar una propiedad cualquiera de las figuras simétricas, se puede elegir la simetría que más convenga. (Párrafos 774 al 779.)

Problema.—Por un punto trazar un plano perpendicular á otros dos. (Párrafo 553.)

PAPELETA 16.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Propiedades relativas de la recta y la circunferencia.*—Cuerdas.—Teorema: En una misma circunferencia ó circunferencias iguales, los arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, y en los desiguales, al mayor corresponde cuerda mayor.—Recíprocamente.—Teorema: En un mismo círculo ó en círculos iguales, las cuerdas iguales equidistan del centro, y de las desiguales la mayor dista menos.—Recíprocamente.—Teorema.—El diámetro perpendicular á una cuerda divide á ésta y á los dos arcos subtendidos por ella en dos partes iguales.—Corolarios: 1.º Por un punto interior á una circunferencia, la mayor cuerda que puede trazarse es un diámetro, y la menor, la que sea perpendicular á este diámetro; 2.º El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas, es el diámetro perpendicular á su común dirección.—Escolios: 1.º El diámetro determinado por el punto medio de un arco es perpendicular á su cuerda, la divide en dos partes iguales y también al resto de la circunferencia; 2.º Definición de sagita ó flecha.—Tangente.—Definición.—Razonamiento para probar la existencia de las tangentes.—Consecuencias: 1.ª Por un punto de una circunferencia puede siempre trazársele...; 2.ª La tangente es paralela al sistema de cuerdas paralelas...—Definiciones más generales de la tangente y que tengan aplicación á cualquier curva.—Curva convexa y cóncava.—Angulo de dos curvas. (Párrafos 111 al 122.)

Comparación de áreas.—Areas de figuras semejantes.—Teorema: Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, y la relación de dichas áreas es igual al cuadrado de la relación de semejanza.—Teorema: Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, ó bien la relación de dichas áreas es igual al cuadrado de la relación de semejanza. Corolarios: 1.º Las áreas de dos polígonos regulares de igual número de lados son proporcionales á los cuadrados de sus radios y apotemas.—2.º El área del polígono construído sobre la hipotenusa es igual á la suma de las áreas de los polígonos semejantes construídos sobre los catetos.—Teorema: Las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios, ó á los cuadrados de sus diámetros.—Corolarios: 1.º Si tomando como diámetro la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo se construyen tres círculos, se tendrá que el círculo construído sobre la hipotenusa.—2.º Lúnulas.—Teorema: Las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios.—Teorema: Las áreas de dos segmentos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios. (Párrafos 420 al 427.)

Problema.—Dados tres puntos que no estén en línea recta, trazar la circunferencia que determinan. (Párrafo 207.)

Geometría en el espacio.—*Propiedades de los triedros.*—Teorema: Si en un triedro un ángulo diedro disminuye ó aumenta permaneciendo constantes las caras que lo forman, la tercera cara disminuye ó aumenta también.—Corolarios: 1.º Si en dos triedros dos caras del uno son respectivamente iguales á dos del otro, la tercera cara del primero será mayor ó menor que la tercera del segundo, según que el diedro opuesto á aquélla sea mayor ó menor que el opuesto á ésta.—2.º Si los diedros comprendidos por las caras iguales, fuesen iguales, las terceras caras lo serán también.—Teorema: Si dos diedros son tales que las caras del uno son iguales, respectivamente, á las del otro, también son iguales los ángulos diedros que se corresponden; es decir, los que en cada triedro se oponen á las caras que son iguales. (Párrafos 586 al 589.)

Simetría.—Simetría respecto á un centro ó á un plano.—Teorema: La figura simétrica de una recta es otra recta.—Corolarios: 1.º Dos rectas limitadas simétricas son iguales.—2.º El ángulo de dos rectas es igual al de sus simétricas.—Escolio: La recta simétrica de otra con respecto á un centro es paralela y de sentido contrario á la propuesta, equidistando ambas del centro; y dos rectas simétricas respecto á un plano forman con él ángulos iguales, y le cortan en un mismo punto.—Teorema: La figura simétrica de un plano es otro plano.—Corolarios: 1.º La figura simétrica de un polígono plano es otro polígono igual á él.—2.º El ángulo de dos planos es igual al de sus simétricos.—Escolio: Dos planos simétricos con relación á un centro, son paralelos y equidistan del mismo.—Dos planos simétricos respecto á un plano, forman con éste ángulos iguales y le cortan según una misma recta.—Teorema: Dos poliedros simétricos tienen: 1.º Sus caras iguales una á una.—2.º Sus diedros homólogos iguales.—3.º Sus ángulos poliedros homólogos simétricos.—Escolio: Centros y planos de simetría en los paralelepípedos.—Observación. (Párrafos 779 al 788.)

Problema.—Por un punto trazar un plano perpendicular á otro. (Párrafo 552.)

PAPELETA 17.ª

Geometría plana.—*Propiedades relativas de la recta y la circunferencia.*—Normales.—Definición.—Teorema: Toda oblicua que parte de un punto no situado en la circunferencia, tiene su longitud comprendida entre las dos normales...—Escolio: Distancia de un punto á una circunferencia.—Secantes y tangentes.—Teorema: Dos paralelas interceptan en una circunferencia. (Párrafos 122 al 126.)

Comparación de áreas.—Areas de figuras isoperímetras.—Máximos y mínimos. Teorema: Entre todos los triángulos que tengan la misma base y el mismo perímetro, el isósceles es el que tiene mayor superficie.—Corolario: Relativo al equilátero.—Teorema: Entre todos los triángulos de la misma base y superficie equivalente, el isósceles es el de perímetro mínimo.—Corolario: Relativo al equilátero.—Teorema: Si se dan dos lados para formar un triángulo, será de área máxima aquel en que el ángulo comprendido por dichos lados sea recto.—Teorema: Si se da la suma de los lados para formar un triángulo, será de área máxima aquel en que dicha suma se divida en dos partes iguales y estos lados estén en ángulo recto. (Párrafos 427 al 433.)

Problemas.—Trazar la perpendicular á una recta por un punto dado en ella.—1.º Cuando el punto dado sea el punto medio de la recta.—2.º Cuando el punto dado sea uno cualquiera; y 3.º Cuando el punto dado sea el extremo de la recta. (Párrafo 187.)

Geometría en el espacio.—*Angulo triedro.*—Teorema: En todo triedro la suma de las tres caras es menor que cuatro ángulos rectos.—Escolio: Haciendo aplicación de las propiedades correlativas, demostrar: 1.º Que la suma de los diedros de un triedro está comprendida entre dos y seis rectos.—2.º Que en todo triedro el menor de los diedros, aumentado en dos rectos, es mayor que la suma de los otros dos.—Observación referente á la clasificación de los triedros por el número de ángulos diedros rectos que tengan. (Párrafos 589 al 592.)

Diámetros y planos diametrales.—Consideraciones.—Diámetros.—Definición; cuerda; puntos homólogos; lados homólogos; diámetro y cuerdas conjugados.—Teorema: Cuando los vértices de un polígono determinan, de dos en dos, un sistema de cuerdas paralelas, dividida cada una en dos partes iguales por una misma recta otra cualquiera paralela á dichas cuerdas y limitada por el perímetro del polígono, queda dividida del mismo modo por la primera recta, que es, por consiguiente, un diámetro.—Corolario: Si un polígono tiene un diámetro, los lados homólogos, si no son paralelos, se cortan en un mismo punto de dicho diámetro.—Escolio: Relación entre los ejes de simetría y los diámetros.—*Planos diametrales.*—Definición; cuerda; puntos homólogos; plano diametral y sistema de cuerdas conjugados.—Teorema: Cuando los vértices de un poliedro determinan de dos en dos un sistema de cuerdas paralelas, dividida cada una en dos partes iguales por un mismo plano, toda recta paralela á dichas cuerdas y limitada por la superficie del poliedro, queda dividida del mismo modo por dicho plano, que es, por consiguiente, un plano diametral. Corolario: Si un poliedro tiene un plano diametral, las rectas determinadas por dos pares de vértices homólogos cortan á dicho plano, si no le son paralelos, en un mismo punto; y los planos determinados por puntos homólogos cortan también al diametral, si no le son paralelos, según una misma recta.—Escolio: Relación entre los planos de simetría y los planos diametrales. (Párrafos 788 al 797.)

Problema.—Hallar la menor distancia entre dos rectas que se cruzan. (Párrafo 555.)

PAPELETA 18.ª

Geometría plana.—*Medida de líneas y ángulos.*—Preliminares.—De la medida en general: Comparación de la magnitud con la unidad; origen de los números enteros, fraccionarios é inconmesurables, según enseña la Aritmética, y qué se entiende por medida de estos últimos; razón de los frecuentes casos de inconmensurabilidad en Geometría.—Consideraciones que conducen á demostrar que se obtiene la relación ó razón de dos magnitudes de la misma especie, dividiendo el número que expresa la medida de la primera, por el que expresa la medida de la segunda.—Medida directa; comparación directa con la unidad.—Medida indirecta; casos en que la naturaleza de la magnitud no permite la comparación directa.—Ejemplos: Magnitudes proporcionales: cuándo son proporcionales dos magnitudes cualesquiera.—Cuarta, media y tercera proporcional; magnitudes directa é inversamente proporcionales. (Párrafos 133 al 144).

Comparación de áreas.—Areas de figuras isoperímetras.—Máximos y mínimos. Teorema: Entre todas las figuras planas isoperímetras, la de área máxima es el círculo.—Teorema: Entre todas las figuras equivalentes, el círculo es la del perímetro mínimo.—(Párrafos 433 al 436.)

Problemas.—Sobre una recta dada construir un triángulo semejante á otro dado. Construir un polígono semejante á otro y cuyo perímetro sea igual á una recta dada. (Párrafos 320 y 322.)

Geometría en el espacio.—*Igualdad de ángulos triedros.*—Teorema: Dos ángulos triedros son iguales, cuando tienen: 1.º Una cara y los dos diedros adyacentes, respectivamente iguales y dispuestos igualmente.—2.º Un diedro igual, formado por caras respectivamente iguales y dispuestas de la misma manera.—3.º Las caras respectivamente iguales y dispuestas del mismo modo.—4.° Sus diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos. — Corolario: Determinación de un triedro.—Escolios: 1.° Triedros simétricos —2.° Analogía con los triángulos rectilíneos. (Párrafos 592 al 595.)

Semejanza. — Definiciones. — Poliedros inversamente semejantes. — Consecuencias de la definición: En dos poliedros semejantes las aristas homólogas son proporcionales. — *Propiedades.* — Teorema: Dos tetraedros son semejantes en los cuatro casos siguientes: 1.° Cuando tienen un diedro igual comprendido por dos caras semejantes una á una y semejantemente dispuestas.—2.° Cuando tienen una cara semejante é iguales los tres diedros adyacentes y semejantemente dispuestos.—3.° Cuando tienen igual un ángulo triedro y semejantes y semejantemente colocadas las tres caras que lo constituyen.—4.° Cuando tienen respectivamente iguales y semejantemente dispuestos sus diedros.—Teorema: Si se corta una pirámide por un plano paralelo á la base, la pirámide total y la deficiente son semejantes. (Párrafos 797 al 801.)

Problema. — Por un punto trazar un plano perpendicular á otro. (Párrafo 552.)

PAPELETA 19.ª

Geometría plana. — *Magnitudes proporcionales.*—Origen de la proporcionalidad y procedimiento expedito para conocerla.—Teorema: Si dos magnitudes varían simultáneamente, de tal modo que á dos valores iguales de la primera correspondan otros dos valores iguales de la segunda, y á un valor de la primera que sea la suma de otros dos de la misma corresponda otro valor de la segunda que sea la suma de los correspondientes á aquéllos, dichas magnitudes serán directamente proporcionales. —Recíprocamente.—Regla general para la proporcionalidad directa.—Si falta alguna de las dos condiciones expresadas, las magnitudes no son proporcionales.—Ejemplo. Magnitud proporcional á otras varias.—Definición.—Demostrar que cuando una magnitud es proporcional á otras varias, la relación de dos valores cualesquiera de la primera es igual al producto de las relaciones de los valores correspondientes de todas las demás. (Párrafos 144 al 152).

Semejanza de figuras. — Definiciones: elementos homólogos; relación de semejanza; polígonos semejantes.—Semejanza de polígonos. Lema: Toda paralela á uno de los lados de un triángulo, forma con los otros dos un nuevo triángulo semejante al primero.—Teorema: Dos triángulos son semejantes: 1.° Cuando son equiángulos.—2.° Cuando tienen un ángulo igual comprendido por lados proporcionales.—3.° Cuando sus lados homólogos son proporcionales.—Corolarios: 1.° Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares.—2.° Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen un ángulo agudo igual.—Escolios: 1.° En los triángulos de la igualdad de ángulos se deduce la proporcionalidad de lados y recíprocamente.—2.° y 3.° Comparación de la semejanza con la igualdad.—Teorema: Dos polígonos son semejantes cuando se componen del mismo número de triángulos semejantes de dos en dos, ó igual mente dispuestos.—Recíprocamente. Dos polígonos semejantes pueden descomponerse...—Escolio.—Teorema: Dos polígonos de igual número de lados son semejantes, cuando se sabe que todos los lados, menos uno en cada polígono, son de dos en dos proporcionales, ó iguales del mismo modo, los ángulos en que no intervengan los lados exceptuados.—Teorema: Dos polígonos de igual número de lados son semejantes, si consta que todos los ángulos menos uno del primero son iguales respectivamente á otros tantos del segundo, y que los lados que forman estos ángulos, menos los del exceptuado, son proporcionales.—Corolario: Casos de semejanza de algunas figuras.—Escolio: Condiciones de semejanza. (Párrafos 256 al 270.)

Problema.—Dado un polígono regular inscrito en una circunferencia, inscribir en ella otro doble número de lados y calcular su lado, en función del de aquél. Escolios: 1.° Dada la cuerda de un arco, calcular la del arco mitad.—2.° El perímetro del polígono buscado es mayor que el del propuesto.—3.° Si se tratara del problema inverso. (Párrafos 344 y 345.)

Geometría en el espacio.—*Angulos poliedros.*—Angulos poliedros simétricos. Angulos poliedros suplementarios.—Teorema: Si un ángulo poliedro es suplementario de otro, éste lo es de aquél.—Teorema: En dos ángulos poliedros suplementarios, un diedro cualquiera de uno de ellos es suplemento de la cara correspondiente del otro.—Teorema: En un ángulo poliedro una cara cualquiera es menor que la suma de todas las demás.—Teorema: En todo ángulo poliedro convexo, la suma de sus caras es menor que cuatro ángulos rectos.—Teorema: En todo ángulo poliedro se verifica que la suma de sus diedros está comprendida entre tantas veces dos rectos como aristas tenga, y este mismo número disminuído en cuatro rectos.—Igualdad de ángulos poliedros. (Párrafos 595 al 604.)

Semejanza de poliedros.—Teorema: Dos poliedros son semejantes si están compuestos del mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos. Recíprocamente: Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en igual número de tetraedros semejantes y semejantemente colocados.—Corolario: Dos poliedros regulares del mismo nombre son semejantes. (Párrafos 801 al 804.)

Problema.—Por un punto trazar el plano perpendicular á otros dos. (Párrafo 553).

PAPELETA 20.ª

Geometría plana.—*Medida de la línea recta.*—Consideraciones.—Casos que pueden ocurrir: 1.° *m n* está contenido en *A B* un número exacto de veces.—2.° Que una parte alícuota de *m n* está contenida en *A B* un número exacto de veces.—3.° *A B* y *m n* son inconmensurables.—Demostración, *a priori*, de la existencia de rectas inconmensurables, comparando la diagonal de un cuadrado con su lado.—Método práctico para medir una recta. (Párrafos 152 al 155).

Homotecia.—Definiciones; figuras ó sistemas de puntos homotéticos; centro y relación de homotecia; homotecia directa ó inversa.—Dado un sistema de puntos, determinar su homotético, para un centro y una relación dados.—Demostrar que la figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia.—Teorema: En dos sistemas homotéticos la recta que une dos puntos cualesquiera en uno de ellos y la que une los puntos homólogos en el otro, son paralelas y están en la relación de homotecia.—Corolarios: 1.° La figura homotética de una recta es otra recta paralela á ella.—2.° Si una recta pasa por el centro de homotecia, su homotética también, y ambas coinciden y recíprocamente.—3.° El ángulo de dos rectas es igual al de sus homotéticas.—4.° La figura homotética de un polígono es otro polígono semejante al mismo, siendo iguales la relación de semejanza y la de homotecia.—5.° Las tangentes en puntos homólogos de curvas homotéticas, son paralelas. (Párrafos 279 al 284.)

Problema.—Dada una recta y un punto fuera de ella, trazar por ésta otra recta que forme con la dada un ángulo conocido. (Párrafo 190.)

Geometría en el espacio.—*Líneas y superficies curvas.—Líneas curvas en general.*—Generación.—Líneas curvas planas y de doble curvatura; elemento de la curva.—Plano osculador. — Tangente y normal; planos tangente y normal. —Angulos de flexión y de torsión.—Puntos singulares.—*Superficies en general.*—Generación y clasificación de las superficies. Propiedades generales.—Generatrices; directrices; leyes de generación, ejemplo de generación de una superficie por generatrices diversas. (Párrafos 604 al 618.)

Semejanza de poliedros.— Puntos y rectas homólogas.—Teorema: En dos poliedros semejantes, las rectas homólogas son proporcionales á las aristas homólogas.—Teorema: Dos poliedros semejantes pueden siempre orientarse de la misma manera. (Párrafos 805 al 808.)

Problema.— Construir un triángulo esférico, dados los tres lados. (Párrafo 707, caso 1.°)

PAPELETA 21.ª

Geometría plana.—*Medida de un arco.* Amplitud de un arco: conceptos en que puede considerarse.—Procedimiento que se sigue en la práctica para obtener su relación en la circunferencia.—Divisiones de la circunferencia; ventajas é inconvenientes de las dos divisiones adoptadas; forma de pasar de una á otra división.—Transportador; sus clases; uso del transportador; arcos semejantes.—Arcos correspondientes.—Teorema: Dos ángulos cualesquiera son proporcionales á los arcos comprendidos entre sus lados y descritos desde sus respectivos vértices, como centro con igual radio.—Corolario: Los arcos semejantes tienen el mismo valor gradual. (Párrafos 155 al 166.)

Propiedades de las figuras semejantes.—Puntos y rectas homólogas.—Teorema: En dos polígonos semejantes las rectas homólogas son proporcionales á los lados homólogos.—Teorema: La relación entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual á la relación de semejanza de los mismos.—Teorema: Todas las rectas que parten de un mismo punto cortan proporcionalmente á dos secantes cualesquiera paralelas.—Corolario: Las rectas quedan divididas como las paralelas.—Recíprocamente: Si dos paralelas son cortadas en segmentos proporcionales por varias rectas...—Teorema: Dos polígonos semejantes situados en un mismo plano pueden siempre colocarse de modo que sus lados homólogos sean paralelos. Escolio: Orientación y nuevo enunciado del anterior teorema. (Párrafos 270 al 279.)

Problemas.—Hallar la cuarta proporcional á tres rectas dadas.—Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas y un segmento $x = \frac{a\ b\ c\ d}{a'\ b'\ c'}$.—Dados dos polígonos semejantes, construir un tercero semejante á ellos, y cuya área sea igual á la diferencia de las áreas de los dados. (Párrafos 307 al 310 y 451.)

Geometría en el espacio.—*Superficies*

en general.—Plano tangente.—Teorema: Todas las tangentes á las diferentes líneas que se pueden trazar en una superficie, por uno de sus puntos, se hallan en un mismo plano.—Escolios: 1.° Determinación del plano tangente.—2.° Cómo puede considerarse el plano tangente.—3.° Plano que es á la vez tangente y secante. 4.° Consideraciones sobre el plano tangente en los puntos singulares.—Normal y plano normal.—*Superficies de revolución.*—Paralelos.—Meridianos.—Teorema: Todos los meridianos de una superficie de revolución son iguales.—Teorema: El plano tangente á una superficie de revolución es perpendicular al del meridiano que pasa por el punto de contacto.—Superficies regladas desarrollables. (Párrafos 618 al 631 y 634 al 638.)

Homotecia.—Definiciones.—Diferencias que existen entre la homotecia de las figuras en un plano y las de las que no lo están.—Procedimientos para obtener todas las figuras homotéticas de una dada. Demostrar que la figura homotética de una esfera, es otra esfera, y que la figura homotética de una circunferencia, con relación á un punto cualquiera del espacio, es otra circunferencia.—Teorema: En dos sistemas homotéticos la recta que une dos puntos cualesquiera en uno de ellos, y la que une los puntos homólogos en el otro, son paralelas, y están en la relación de homotecia.—Consecuencias: *a.* La figura homotética de una recta es otra recta paralela á ella, y el ángulo de dos rectas es igual al de sus homotéticas.—*b.* La figura homotética de un plano es otro plano paralelo á él; si el plano pasa por el centro de homotecia, coincide con su homotético, el ángulo de dos planos es igual al de sus homólogos.—*c.* La figura homotética de un polígono es otro polígono semejante á él, y de lados respectivamente paralelos, siendo también paralelos los planos de ambos; la figura homotética de un poliedro es otro poliedro cuyas aristas son respectivamente paralelas, pero sólo son semejantes los homotéticos directos. *d.* Las tangentes en puntos homólogos de curvas homotéticas son paralelas; los planos tangentes en puntos homólogos, de superficies homotéticas, son paralelas. (Párrafos 808 al 812.)

Problema.—Construir un triángulo esférico, dados dos lados y el ángulo comprendido. (Párrafo 707, caso 2.°)

PAPELETA 22.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Medida de ángulos.* Evaluación en grados.—Consideraciones que inducen á referir la medida del ángulo á la del arco comprendido entre sus lados y que tenga el vértice por centro.—Teorema: Todo ángulo tiene la misma medida que el arco comprendido entre sus lados y descrito con un radio arbitrario desde el vértice, como centro.—Reducir un ángulo expresado en grados, minutos y segundos á su verdadera medida.—Angulos en el círculo.—Definiciones.—Teorema: Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene la misma medida que la mitad del arco comprendido por sus lados.—Corolarios: 1.° Todos los ángulos inscritos en un mismo arco son iguales.—2.° Dos ángulos inscritos en cada uno de los arcos que determina una cuerda, son suplementarios.—3.° Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.—4.° Un ángulo inscrito en un arco, es agudo, recto ú obtuso, según que el arco sea mayor, igual ó menor que la semicircunferencia.—5.° En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios. (Párrafos 166 al 175.)

Homotecia.—Teorema: Dos sistemas son homotéticos si existen en su plano dos puntos tales que, uniendo uno de ellos con los puntos del primer sistema y el otro con los homólogos del segundo, resulten rectas respectivamente paralelas y que estén en la misma relación.—Corolarios: 1.° Dos polígonos semejantes de igual ú opuesta orientación, son homotéticos directos ó inversos.—2.° Dos circunferencias cualesquiera son siempre homotéticas directa ó inversamente; los dos centros de homotecia dividen armónicamente á la línea de los centros.—Teorema: Dos sistemas homotéticos á un tercero, son homotéticos entre sí.—Corolario: Dos sistemas homotéticos de un tercero respecto á centros distintos y á una misma relación de homotecia, son iguales.—Escolio: Demostrar que los tres centros de homotecia están en línea recta.—Definición general de semejanza. (Párrafos 284 al 290.)

Problemas.—Dado un polígono regular inscrito, circunscribir otro semejante y calcular su lado en función del lado del propuesto.—Dados dos círculos, construir un tercero cuya área sea igual á la suma de las áreas de los dados. (Párrafos 346 y 451.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Superficie cónica.*—Generación y definiciones.—Definición de superficie cónica.—Superficie cónica cerrada ó abierta.—Cono.—Base y altura del cono.—Cono circular, recto ú oblicuo.—Cómo puede engendrarse el cono circular recto.—Cono equilátero.—Secciones paralelas y antiparalelas.—Tronco de cono de 1.ª y 2.ª especie.—Nuevo medio de generación del cono. (Párrafos 638 al 64 .)

Areas.—Poliedros.—Generalidades.—Teorema: El área de la superficie lateral de una pirámide regular, es igual á la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema.—Teorema: El área de la superficie lateral de un tronco de pirámide regular, es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las dos bases por la apotema.—Corolario: El área lateral de un tronco de pirámide regular en función de la sección paralela á las bases, y equidistante de ellas, es igual á la apotema multiplicada por el perímetro de dicha sección.—Teorema: El área de la superficie lateral de un prisma, es igual al producto de su arista lateral por el perímetro de la sección recta.—Corolario: Caso particular de ser recto el prisma.—Escolio: Area total de una pirámide regular, de un tronco de la misma ó de un prisma.—Fórmulas para las áreas de las superficies de los poliedros regulares. (Párrafos 816 al 825.)

Problemas.—Por un punto trazar una recta paralela á un plano y un plano paralelo á una recta. (Párrafos 545 y 546.)

PAPELETA 23.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Medida de ángulos.* Teorema: Todo ángulo formado por dos secantes que se cortan en un punto del círculo, tiene la misma medida que la semisuma de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones.—Teorema: Todo ángulo formado por dos secantes que se cortan fuera del círculo, tiene la misma medida que la semidiferencia entre el mayor y el menor de los arcos interceptados por sus lados.—Arco capaz de un ángulo dado.—Lugar geométrico desde el cual se ve una recta bajo el mismo ángulo; ídem bajo el ángulo suplementario. (Párrafos 175 al 180.)

Problemas.—Construir un polígono igual á otro dado.—Métodos: 1.° Construyendo los lados y ángulos de un polígono iguales á los de otro.—2.° Descomponiendo el polígono dado en triángulos.—3.° Trazando desde los vértices del citado polígono perpendiculares á una recta cualquiera.—4.° Trazando por todos los vértices del polígono dado, paralelas á una dirección arbitraria.—5.° Construyendo un polígono simétrico del dado con respecto á un eje ó centro.—6.° Por el método de las cuadrículas.—Dados los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, uno inscrito y otro circunscrito á una misma circunferencia, calcular los perímetros de los polígonos de iguales condiciones y de doble número de lados. (Párrafos 206 y 350.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Propiedades de la superficie cónica.*—Teorema: En una superficie cónica las secciones paralelas son curvas semejantes.—Teorema: En un cono oblicuo de base circular, toda sección antiparalela á dicha base es un círculo.—Plano tangente.—Desarrollo de la superficie lateral de un cono. (Párrafos 641 al 647.)

VOLÚMENES.—Teorema: El volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje trazado por uno de sus vértices en el mismo plano y exterior á dicho triángulo, tiene por medida el producto del área de la superficie engendrada por el lado opuesto al vértice situado en el eje, por el tercio de la longitud de la altura correspondiente á este lado.—Teorema: El volumen engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un diámetro exterior al mismo, tiene por medida el producto del área de la superficie engendrada por la línea quebrada que le sirve de base por el tercio de la apotema correspondiente á la misma.—Corolario: El volumen engendrado por un sector circular, tiene por medida el área de la superficie engendrada por el arco que le sirve de base multiplicada por el tercio del radio. (Párrafos 878 al 881.)

Problema.—Por un punto trazar un plano paralelo á otro dado. (Párrafo 547.)

PAPELETA 24.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Problemas.—Consideraciones preliminares.*—Instrumentos: regla, escuadra, escuadra de muleta, falsa escuadra.—Reglas para el dibujo. (Párrafos 180 al 186.)

Líneas proporcionales.—Segmentos.—Origen, sentido, signos adoptados para representar los sentidos.—Consecuencias.—Lema 1.°: La distancia de un punto á otro es igual á la diferencia de las distancias del origen al segundo y al primero de dichos puntos.—Lema 2.°: Si se dan dos puntos fijos sobre una recta indefinida, existen siempre sobre ella otros dos, y únicamente dos, para los cuales las relaciones de las distancias de cada uno de ellos á los dados, tienen un mismo valor absoluto determinado.—Escolio: Segmentos aditivos y sustractivos.—Proporción armónica.—Definición: dividir una recta en una relación dada. (Párrafos 229 al 240.)

Problema.—Dada una recta y en ella un punto, trazar por éste otra recta que forme con la dada un ángulo conocido. (Párrafo 189.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Superficie cilíndrica.*—Generación y definiciones: Superficie cilíndrica; generatriz; eje; cilindro; bases; altura; cilindro recto, oblicuo y circular; cómo puede engendrarse este último; tronco de cilindro.—Propiedades.—Teorema: Las secciones causadas en una superficie cilíndrica por planos paralelos, son iguales.—Corolario: La proyección oblicua ú ortogonal de una curva cuyo plano es paralelo al de proyección, es igual á dicha curva.—Escolio: Sección recta.—Plano tangente.—Desarrollo de la superficie lateral de un cilindro. (Párrafos 647 al 655.)

Volúmenes.—Teorema: Un tronco de prisma triangular equivale á tres tetraedros que tengan por bases las del tronco y por vértices los de la base superior del mismo.—Corolario: Si el tronco fuese un prisma...—Teorema: El volumen de una pirámide es igual al tercio del producto del área de la base por la longitud de la altura.—Corolario 1.°: El volumen de un tronco de prisma triangular es igual al producto del área de la base inferior por el tercio de la suma de las tres perpendiculares trazadas á la misma por los vértices de la superior; caso en que el tronco de prisma sea recto, y determinar dicho volumen en función de la sección recta cuando el prisma sea oblicuo.—Corolario 2.°: El volumen de un tronco de paralelepípedo es igual al producto de su base por la cuarta parte de la suma de las perpendiculares trazadas á la base inferior desde los vértices de la superior; determinar este volumen en función de la sección recta.—Escolio: Volumen de un tetraedro regular en función de la arista. (Párrafos 862 al 867.)

Problema.—Trazar un arco de círculo máximo perpendicular á otro dado en su punto medio, ó sea dividir en dos partes iguales un arco de círculo máximo. (Párrafo 704.)

PAPELETA 25.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Observaciones generales sobre los problemas.*—Procedimientos generales: Sintético y analítico.—Ejemplos: del 1.°, trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice no se conoce; del 2.°, dado un punto y una circunferencia, trazar por aquél una tangente á ésta.—Métodos especiales.—Sustituciones sucesivas: por simetría; superposición; reducción al absurdo; intersección de lugares geométricos.—Construcciones auxiliares. (Párrafos 219 al 239.)

Segmentos proporcionales.—Entre paralelas.—Teorema: Cuando una serie de paralelas corta á dos rectas la relación de dos segmentos cualesquiera de una de éstas, es igual á la relación de los segmentos correspondientes de la otra.—Escolio: Enunciado más breve de este teorema.—En un triángulo.—Teorema: Toda paralela á uno de los lados de un triángulo divide á los otros dos en partes proporcionales.—Recíprocamente: Si sobre dos lados de un triángulo están respectivamente situados dos puntos que los dividan en partes proporcionales, la recta que los une es paralela al tercer lado. (Párrafos 240 al 245.)

Problemas.—Trazar una circunferencia por tres puntos que no estén en línea recta.—Inscribir una circunferencia en un triángulo. (Párrafos 207 y 208.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Superficie esférica.*—Generación y definiciones; centro; esfera; radio; diámetro; casquete y segmento esféricos; zona; rebanada; bases y altura de la zona; huso; cuña; sector esférico.—Propiedades.—Teorema: Por cuatro puntos que no estén en un mismo plano se puede siempre hacer pasar una superficie esférica, y sólo una.—Escolio: Un plano puede considerarse como límite de una superficie esférica cuyo radio se ha hecho infinito. (Párrafos 655 al 659.)

Volúmenes.—Teorema: Un tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente á la suma de tres pirámides que tengan la misma altura que el tronco y cuyas bases sean las dos de éste y una media proporcional entre ellas.—Volumen de un poliedro cualquiera; caso en que el poliedro esté formado por dos caras paralelas y una serie de trapecios ó triángulos laterales. (Párrafos 867 y 869 al 871.)

Problema.—Hallar el polo de un círculo menor que pase por tres puntos dados en una superficie esférica. (Párrafo 705.)

PAPELETA 26.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Problemas.*—Número de condiciones que determinan un polígono y especialmente un triángulo. Construir un triángulo: 1.° Dados los tres lados.—2.° Dados dos lados y el ángulo comprendido.—3.° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.—Discusión.—Escolio: Dos triángulos son iguales cuando tienen respectivamente.....—Construir un triángulo, conocidos un lado y los dos ángulos adyacentes. (Párrafos 193 al 201.)

Segmentos proporcionales.—En un círculo.—Rectas antiparalelas.—Teorema: Cuando un ángulo es cortado por dos rectas antiparalelas, el producto de los dos segmentos que resultan á partir del vértice sobre un mismo lado es constante.—Recíproco: Si dos rectas cortan á los lados de un ángulo de modo que el producto de los dos segmentos contados sobre cada lado.....—Corolario: Cuando las antiparalelas se corten en un punto de uno de los lados del ángulo. (Párrafos 248 al 252.)

Problema.—Dados dos círculos, trazar una tangente común á sus circunferencias.—Discusión.—Escolio: Las tangentes se encuentran en un mismo punto de la línea de los centros y ésta es bisectriz del ángulo que forman. Estas tangentes son iguales. (Párrafos 211 al 214.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Superficie esférica.*—Posiciones relativas de dos esferas.—Teorema: La intersección de dos esferas es un círculo cuyo plano es perpendicular á la línea de los centros de las mismas, siendo la intersección de este plano con esta línea el centro de dicho círculo.—Escolios: 1.° Superficies esféricas tangentes.—2.° Posiciones distintas de dos esferas.—Angulos en la superficie esférica.—Teorema: El ángulo de dos arcos de círculo máximo tiene la misma medida que el arco de círculo máximo descrito desde el vértice como polo y comprendido entre sus lados, ó bien que el arco de círculo máximo que une los polos de los lados del ángulo.—Corolarios: 1.° El lugar geométrico de los polos de los círculos máximos, cuyas circunferencias forman un ángulo dado con otra circunferencia de círculo máximo fija, se compone de dos circunferencias, cuyos polos son los dos de la fija y el radio esférico de ambas es igual al arco de círculo máximo que mide el ángulo dado. 2.° Para que dos circunferencias de círculo máximo se corten octogonalmente, es preciso y basta que cada una de ellas pase por el polo de la otra.—Dos circunferencias de círculo máximo forman cuatro ángulos: los adyacentes son suplementarios y los opuestos por el vértice son iguales. (Párrafos 669 al 674.)

Volúmenes.—Cuerpos limitados por superficies curvas.—Teorema: El volumen de un cilindro cualquiera es igual.....—Idem cuando el cilindro sea circular recto.—Escolio: El volumen de un tronco de cilindro de revolución, es igual...—Teorema: El volumen de un cono cualquiera es igual...—Idem si es de revolución.—Escolio: Volumen que engendra un rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus lados.—Idem un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.—Teorema: El volumen de un tronco de cono de bases paralelas y de primera especie, equivale... Corolario: Idem en el caso de ser el tronco de revolución.—Escolio: Caso de un tronco de cono en que difieran muy poco *R* y *r*. (Párrafos 871 al 878.)

Problema.—Trazar por una recta un plano perpendicular á otro. (Párrafo 554.)

PAPELETA 27.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Problemas.*—Construir un triángulo rectángulo, conociendo: 1.° Un cateto y un ángulo agudo.—2.° La hipotenusa y un ángulo agudo.—3.° Los dos catetos.—4.° La hipotenusa y un cateto.—Construir un triángulo isósceles, conociendo: 1.° Un lado y la base.—2.° Un lado y uno de los dos ángulos iguales.—3.° Un lado y el ángulo en el vértice.—4.° La base y uno de los dos ángulos iguales.—5.° La base y el ángulo opuesto.—Construir un paralelogramo, conocidos dos lados contiguos y el ángulo comprendido.—Escolio: Elementos que se necesitan para construir el rombo, el rectángulo y el cuadrado. (Párrafos 201 al 206.)

Segmentos proporcionales.—En el círculo.—Teorema: Si se toma un punto cualquiera en el plano de un círculo y se trazan varias secantes, el producto de los dos segmentos determinados por la circunferencia sobre cada una de ellas, á partir de aquel punto, es constante.—Recíprocamente: Cuando dos rectas limitadas, prolongadas si es necesario, se corten en un punto tal, que den lugar á la relación indicada, los cuatro extremos de dichas rectas están sobre una misma circunferencia.—Corolario 1.° La perpendicular trazada desde un punto de la circunferencia á un diámetro cualquiera, es media proporcional entre los dos segmentos que el pie de la primera determina en el segundo.—Recíprocamente: Si desde un punto se traza á una recta limitada, una perpendicular que resulte media proporcional entre los dos segmentos que su pie determina en aquélla, dicho punto pertenece á la circunferencia que tiene por diámetro la mencionada recta.—Corolario 2.° Si de un punto parten una tangente y una secante á una circunferencia, la tangente es media proporcional entre la secante entera y su parte externa.—Recíprocamente: Cuando sobre los dos lados de un ángulo se tengan tres puntos tales, que el segmento contado desde el vértice en el lado que sólo haya un punto, sea medio proporcional entre los dos segmentos del otro lado, la circunferencia determinada por estos tres puntos, es tangente al primer lado.—Escolio: Potencia de un punto con relación á un círculo. (Párrafos 252 al 256.)

Problema.—Dado un polígono regular inscrito en una circunferencia, inscribir en ella otro de doble número de lados y calcular su lado en función del de aquél. Escolios: 1.° Dada la cuerda de un arco, calcular la que subtiende un arco mitad. 2.° El perímetro del polígono buscado es mayor que el del propuesto.—3.° Si se tratara del problema inverso. (Párrafos 344 y 345.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Polígonos esféricos.*—Definiciones: Polígonos esféricos convexos; triángulo esférico; su clasificación.—Propiedades.—Relación entre los ángulos poliedros y los polígonos esféricos, que permite deducir que para cada propiedad de los ángulos poliedros corresponde una análoga de los polígonos esféricos.—Consecuencias de este principio: 1.ª Polígono esférico simétrico.—2.ª Relación entre un lado y la suma de los demás, en un polígono esférico; ídem si es triángulo.—3.ª Relación entre los lados y los ángulos opuestos en un triángulo esférico.—4.ª Idem cuando es isósceles ó equilátero.—5.ª Si dos triángulos esféricos tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido en uno es menor que el comprendido en el otro...—6.ª Si dos triángulos esféricos tienen sus lados respectivamente iguales, también lo son los ángulos opuestos á lados iguales.—7.ª En todo polígono esférico convexo, la suma de sus lados es menor que una circunferencia de círculo máximo.—8.ª Si dos triángulos esféricos tienen un lado común y el vértice opuesto en uno de ellos está en el interior del otro, la suma de los dos lados no comunes del envuelto...—9.ª Si dos triángulos esféricos tienen un lado común y los vértices opuestos son exteriores á dichos triángulos, la suma de los lados.... (Párrafos 674 al 680.)

Areas.—Teorema: El área de una zona es igual al producto de la circunferencia de un círculo máximo de su esfera por la altura.—Teorema: El área de un casquete es igual á su altura multiplicada por una circunferencia de círculo máximo de su esfera.—Corolario: Expresión de esta área en función de la cuerda del arco generador.—Teorema: El área de la superficie esférica es igual á ....—Teorema: El área de un huso es igual á la cuarta parte de la superficie esférica, multiplicada por el número que expresa...—Corolario: Area del huso en función del triángulo esférico trirrectángulo. (Párrafos 836 al 843.)

Problema.—Por una recta trazar un plano paralelo á una recta dada. (Párrafo 548).

PAPELETA 28.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Problema.*—Dado un punto y una circunferencia, trazar por aquél una tangente á ésta.—Casos: 1.º El punto se da sobre la circunferencia.—2.º Punto exterior á la circunferencia; 1.ª y 2.ª solución.—Escolios: 1.º Hacer ver que la recta que une el punto en que se cortan dos tangentes á una misma circunferencia, con el centro de ésta, es bisectriz del ángulo formado por aquéllas. 2.º Trazar una tangente á una circunferencia paralela á una dirección dada. (Párrafos 209 al 211).

Areas.—Definiciones.—Area; figuras equivalentes, iguales y semejantes; medidas de las superficies.—*Determinación de las áreas.*—En las figuras rectilíneas.—Teorema: Si dos rectángulos de la misma base tienen alturas iguales, son iguales; si un rectángulo tiene la misma base que otros dos y su altura es igual á la suma de las de éstos, el primer rectángulo es igual á la suma de los segundos.—Corolarios: 1.º Dos rectángulos que tengan bases iguales son proporcionales á sus alturas.—2.º Dos rectángulos de alturas iguales son proporcionales á sus bases.—3.º Todo rectángulo es proporcional á su base y á su altura.—4.º La relación de las áreas de dos rectángulos es igual á la relación de los productos de los números que miden sus respectivas bases y alturas. Escolio: Dimensiones de un rectángulo. Teorema: El área de un rectángulo es igual al producto del número que mide su base por el que mide su altura.—Corolario: Area de un cuadrado.—Teorema: Area de un paralelogramo.—Teorema: Area de un triángulo: Hallar esta área en función del lado cuando el triángulo es equilátero. (Párrafos 389 al 399.)

Problema.—Inscribir un cuadrado en una circunferencia y deducir la longitud del lado en función del radio.—Corolarios: 1.º Longitud de la apotema.—2.º Lado del cuadrado circunscrito.—3.º Cómo se pasa del cuadrado á los polígonos de 8, 16, 32... 2^n lados. (Párrafos 351 y 352.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Polígonos esféricos.*—Triángulo esférico polar de otro.—Teorema: Si un triángulo esférico es polar de otro, éste lo es del primero. Escolios: 1.º Medios de obtener el triángulo polar de otro.—2.º Analogía con los triedros suplementarios.—Teorema: En dos triángulos esféricos polares, un lado de uno de ellos tiene por suplemento el ángulo correspondiente en el otro.—Corolario: En todo triángulo esférico, la suma de los ángulos es mayor que dos rectos y menor que seis; y el menor ángulo aumentado en dos rectos, es mayor que la suma de los otros dos.—Escolio: Clasificación de los triángulos esféricos. (Párrafos 680 al 688.)

Areas y volúmenes de los cuerpos.—Teorema: Dos triángulos esféricos simétricos son equivalentes.—Teorema: El área de un triángulo esférico es igual á la suma de los números que expresan las medidas de sus tres ángulos, disminuída en dos unidades.—Escolio: Exceso esférico. Teorema: El área de un polígono esférico es igual á la suma de los números que expresan las medidas de sus ángulos, disminuída en tantas veces dos rectos como lados tenga, menos dos, siendo el ángulo recto la unidad de ángulos, y el triángulo trirrectángulo la de superficie. Escolio: El área de un polígono esférico convexo es también igual al exceso de cuatro rectos sobre el perímetro del polígono polar. (Párrafos 843 al 849.)

Problema.—Por un punto trazar un plano perpendicular á otros dos. (Párrafo 553.)

PAPELETA 29.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Posiciones relativas de dos circunferencias.*—Posiciones distintas que pueden tener.—Línea de los centros.—Definición.—Teorema: En dos circunferencias secantes, la línea de los centros es perpendicular á la cuerda común á las dos circunferencias en su punto medio.—Corolario: Si las circunferencias son tangentes, la línea de los centros pasa por el punto de contacto, y la perpendicular en este punto á dicha línea de los centros, es tangente á las dos curvas.—Teorema: La línea de los centros comparada con los radios de las circunferencias: 1.º En dos circunferencias exteriores es mayor que la suma de los radios.—2.º En dos circunferencias tangentes exteriormente es igual á la suma.—3.º En dos circunferencias secantes es menor que la suma y mayor que la diferencia.—4.º En dos tangentes interiormente es igual á la diferencia.—5.º En dos interiores es menor que la diferencia.—6.º En dos concéntricas es nula.—Recíprocas. (Párrafos 126 al [illegible].)

Areas.—Teorema: El área de un trapecio es igual al producto de la altura por la semisuma de las bases.—Teorema: El área de un polígono regular convexo, es igual á la mitad del producto de la longitud del perímetro por la apotema.—Area del sector poligonal regular.—Escolio: Area del triángulo equilátero y demás polígonos regulares, en función del lado.—Area de un polígono cualquiera. (Párrafos 401, 402, 404 y 405.)

Problemas.—Inscribir en una circunferencia un exágono y calcular la longitud de su lado.—Corolarios: 1.º Calcular la longitud del lado del triángulo equilátero inscrito.—2.º Longitud de la apotema.—3.º Longitud del lado del triángulo equilátero circunscrito.—4.º División de un cuadrante en tres partes iguales.—5.º Manera de dividir la circunferencia en 12, 24, 48.....3×2^n partes iguales. (Párrafos 353 y 354.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Igualdad de triángulos esféricos.*—Teorema: Sobre una misma esfera ó sobre esferas iguales, lo son dos triángulos esféricos cuando tienen iguales y dispuestos del mismo modo.—1.º Un lado y dos ángulos adyacentes.—2.º Dos lados y el ángulo comprendido.—3.º Los tres lados.—4.º Los tres ángulos.—Escolio: Diferencia entre la igualdad de triángulos rectilíneos y la de esféricos.—Arcos de círculo máximo trazados sobre la esfera.—Teorema: Comparación del arco de círculo máximo perpendicular y varios oblicuos trazados desde un punto á otro arco de círculo máximo, siendo el arco perpendicular menor que un cuadrante.—Corolarios: 1.º Si un arco de círculo máximo es perpendicular á otro en su punto medio, el primero es el lugar geométrico de los puntos de la superficie esférica que equidistan de los extremos de dicho arco.—2.º En un triángulo esférico isósceles, el arco de círculo máximo que une el vértice con el punto medio de la base, corta ortogonalmente á ésta y divide el ángulo opuesto en dos partes iguales.—3.º En todo triángulo esférico rectángulo, cada cateto y su ángulo opuesto son de la misma especie.—Escolio: Consecuencias que se deducen del teorema, cuando el arco de círculo máximo perpendicular es mayor que un cuadrante. (Párrafos 688, 689 y 695 al 698.)

Volúmenes.—Conceptos que puede tener la palabra volumen.—Poliedros.—Teorema: Si dos paralelepípedos rectángulos de la misma base tienen alturas iguales, son iguales.—Si tres paralelepípedos rectángulos de la misma base tienen sus alturas de modo que la de uno de ellos sea igual á la suma de las de los otros dos, el paralelepípedo correspondiente á la primera, es igual á la suma de los que correspondan á las otras alturas. Corolario 1.º: El volumen de un paralelepípedo rectángulo de base constante es proporcional á su altura.—Corolario 2.º: Dos paralelepípedos rectángulos que tengan iguales dos aristas, son proporcionales á las terceras.—Corolario 3.º: Dos paralelepípedos rectángulos son proporcionales á los productos de sus respectivas bases y alturas.—Escolio: Dimensiones de un paralelepípedo rectángulo.—Teorema: El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de la medida de su base por la de su altura. Corolario 1.º: El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres aristas ó dimensiones.—Corolario 2.º: Volumen de un cubo. (Párrafos 849 al [illegible].)

Problema.—Dados sobre una esfera un [illegible] (Párrafo [illegible].)

PAPELETA 30.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Propiedades relativas de la recta y la circunferencia.*—Cuerdas.—Teorema: En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales, los arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, y de los desiguales, al mayor corresponde cuerda mayor. — Recíprocamente.—Teorema: En un mismo círculo ó en círculos iguales, las cuerdas iguales equidistan del centro, y de las desiguales la mayor dista menos.—Recíprocamente. Teorema: El diámetro perpendicular á una cuerda, divide á ésta y á los dos arcos subtendidos por ella, en dos partes iguales.—Corolarios: 1.° Por un punto interior á una circunferencia, la mayor cuerda que puede trazarse es un diámetro, y la menor, la que sea perpendicular á ese diámetro.—2.° El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas, es el diámetro perpendicular á su común dirección.—Escolios: 1.° El diámetro determinado por el punto medio de un arco, es perpendicular á su cuerda, la divide en dos partes iguales y también al resto de la circunferencia.—3.° Definición de sagita ó flecha. (Párrafos 111 al 116.)

Problemas.—Inscribir en una circunferencia un decágono y un pentágono regulares convexos, y calcular sus lados en función del radio.—Inscribir en una circunferencia un pentedecágono regular convexo y calcular su lado en funcion del radio. (Párrafos 355 al 358 y el 359, sólo en el primer caso.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Superficie esférica.* — Propiedades. — Teorema: Por cuatro puntos que no estén en un mismo plano, se puede siempre hacer pasar una superficie esférica y sólo una.—Escolio: Un plano puede considerarse como límite de una superficie esférica, cuyo radio se ha hecho infinito.—Teorema: Las secciones planas de una esfera, son círculos. Escolio: Fórmula $r=\sqrt{R^2-d^2}$; ¿Cuándo produce la sección círculo máximo ó menor?—Consecuencias de esta expresión: 1.° Dos círculos menores equidistantes del centro, son iguales y recíprocamente.—2.° De dos círculos menores cualesquiera, el mayor dista menos del centro y recíprocamente.—3.° Para determinar un círculo menor, se necesitan tres puntos.—De la definición de círculo máximo, se deduce: 1.° Todos los círculos máximos de una misma esfera...—2.° Dos círculos máximos se cortan mutuamente...—3.° Un círculo máximo divide á la esfera y á su superficie en dos...—4.° Una recta sólo puede cortar á la superficie esférica...—5.° Cualquier semicírculo máximo sirve para engendrar... — 6.° Dos puntos bastan para determinar un círculo máximo. (Párrafos 657 al 663.)

Volúmenes.—Teorema: Dos paralelepípedos que tengan una cara común, y las opuestas á ésta en un mismo plano y comprendidas entre dos mismas paralelas, son equivalentes.—Teorema: Dos paralelepípedos que tengan la misma base y la misma altura, son equivalentes.—Teorema: Todo paralelepípedo puede transformarse en otro rectángulo del mismo volumen, de base equivalente y de la misma altura.—Teorema: El volúmen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de la medida de su base por la de su altura. (Párrafos 855 al 859.)

Problema.—Dados un punto y un arco de círculo máximo en una superficie esférica, trazar por el primero un arco de círculo máximo perpendicular al segundo. (Párrafo 703.)

PAPELETA 31.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Medida de líneas y ángulos.*—Preliminares.—De la medida en general, comparación de la magnitud con la unidad: origen de los números enteros, fraccionarios ó inconmensurables, según enseña la Aritmética, y qué se entiende por medida de estos últimos; razón de los frecuentes casos de inconmensurabilidad en Geometría.—Consideraciones que conducen á demostrar que se obtiene la relación ó razón de dos magnitudes de la misma especie dividiendo el número que expresa la medida de la primera por la que expresa la medida de la segunda.—Medida directa: comparación directa con la unidad.—Medida indirecta: casos en que la naturaleza de la magnitud no permite la comparación directa — Ejemplos. — Magnitudes proporcionales: cuándo son proporcionales dos magnitudes cualesquiera.—Cuarta media y tercera proporcional.—Magnitudes directa é inversamente proporcionales. (Párrafos 133 al 144).

Segmentos proporcionales.—En un triángulo.—Teorema: En todo triángulo la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en dos segmentos aditivos, y la bisectriz del ángulo externo en dos segmentos substractivos, que son proporcionales á los otros dos lados.— Recíprocamente.— La recta que partiendo de un vértice de un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales á los otros dos lados, es bisectriz del ángulo del triángulo ó del externo, según que los segmentos sean aditivos ó substractivos.—Corolario 1.° Dos rectas que se cortan y las bisectrices de los dos ángulos que forman, determinan, sobre una secante cualquiera, cuatro puntos tales, que los producidos por las rectas ó por las bisectrices son conjugados armónicos respecto á los otros dos.—Ejemplo: En todo triángulo inscripto en una circunferencia, el diámetro perpendicular á un lado queda dividido armónicamente por los otros dos. Recíproca del ejemplo: Si un diámetro queda dividido armónicamente por dos lados de un triángulo inscrito en la circunferencia, este diámetro es perpendicular al tercer lado.— Corolario 2.° El lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á dos dados están en una relación constante $\frac{m}{n}$, es la circunferencia que tiene por diámetro el intervalo comprendido entre los dos puntos de la recta que une á aquellos que dividan á este segmento armónicamente en la citada relación $\frac{m}{n}$. (Párrafos 245 al 248.)

Problema.—Dado un punto en el plano de dos rectas que no pueden prolongarse, trazar por él otra recta que concurra al vértice del ángulo formado por aquéllas. (Párrafo 323.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Superficie esférica.*— Polos. — De la definición de éstos se deduce: 1.° Que todos los círculos paralelos tienen los mismos polos — 2.° Todo círculo máximo que pase por los polos de otro círculo cualquiera, tiene su plano perpendicular al de éste.—3.° La recta que pasa por los dos polos de un círculo, además de estas dos condiciones, satisface á las de ser perpendicular al plano de dicho círculo, pasar por su centro y por el de la esfera.—Teorema: Todos los puntos de una circunferencia trazada sobre la esfera, equidistan de uno cualquiera de sus polos.—Escolios: 1.° Distancia polar, radio esférico.—2.° Compás esférico. (Párrafos 663 al 666.)

Áreas y volúmenes.—Estudio comparativo de las áreas y volúmenes correspondientes á los cuerpos engendrados por la revolución de un círculo y el cuadrado y el triángulo equilátero circunscriptos, girando alrededor de un eje común, diámetro de dicho círculo.

Hallar las fórmulas en función del radio del círculo inscrito y deducir la igualdad de relaciones entre los volúmenes y áreas totales.

Generalizar la propiedad á poliedros cualesquiera circunscriptos á la esfera. (Párrafos 898 y 899.)

Problema.—Por un punto trazar la perpendicular á un plano. (Párrafo 550.)

PAPELETA 32.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Magnitudes proporcionales.*—Origen de la proporcionalidad y procedimiento expeditivo para conocerla. Teorema: Si dos magnitudes varían simultáneamente de tal modo que á dos valores iguales de la primera correspondan otros dos valores iguales de la segunda, y á un valor de la primera que sea la suma de otros dos de la misma corresponda otro valor de la segunda, que sea la suma de los correspondientes á aquéllos, dichas magnitudes serán directamente proporcionales.—Recíprocamente: Regla general para la proporcionalidad directa.—Si falta alguna de las dos condiciones expresadas, las magnitudes no son proporcionales.—Ejemplo: Magnitud proporcional á otras varias.— Definición.—Demostrar que cuando una magnitud es proporcional á otras varias, la relación de dos valores cualesquiera de la primera es igual al producto de las relaciones de los valores correspondientes de todas la demás. (Párrafos 144 al 152.)

Segmentos proporcionales.—Entre paralelas.—Teorema: Cuando una serie de paralelas corta á dos rectas, la relación de dos segmentos cualesquiera de una de éstas es igual á la relación de los segmentos correspondientes de la otra.—Escolio: Enunciado más breve de este teorema.—En un triángulo.—Teorema: Toda paralela á uno de los lados de un triángulo divide á los otros dos en partes proporcionales.— Recíprocamente: Si sobre dos lados de un triángulo están, respectivamente, situados dos puntos que los dividan en partes proporcionales, la recta que los une es paralela al tercer lado. (Párrafos 240 al 245.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Superficie esférica.*—Plano tangente.—Teorema: La tangente en un punto á una curva cualquiera trazada en la superficie esférica, es perpendicular al radio que pasa por dicho punto.—Corolario: 1.° El plano tangente en un punto á una superficie esférica es perpendicular al radio que pasa por dicho punto.—Recíprocamente.—2.° El plano tangente á una superficie esférica sólo tiene un punto común con ella. Recíprocamente.— Escolios: 1.° Por un punto dado en la superficie esférica se puede siempre trazar un plano tangente y uno solo.—2.° A lo largo de la circunferencia común á la esfera y al cono, son asimismo comunes los planos tangentes, y la superficie cónica es tangente á la esférica en toda la extensión de la curva.— 3.° A una esfera pueden trazarse infinitos planos tangentes, paralelos á una dirección dada. (Párrafos 666 al 669.)

Volúmenes. — Teorema: Todo prisma triangular equivale á la mitad de un paralelepípedo de doble base y de la misma altura.—Teorema: Todo prisma tiene por expresión de su volúmen el producto...— Teorema: Dos pirámides triangulares de base equivalentes y alturas iguales, son equivalentes. (Párrafos 859 al 862.)

Problema.—Dados dos puntos en la su

perficie de una esfera, hacer pasar por el os una circunferencia de círculo máximo. (Párrafo 702.)

PAPELETA 33.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Paralelas.*—Definición.—Propiedades.—Teorema: Por un punto fuera de una recta puede siempre trazársele una paralela.—Principio fundamental.—Corolario: 1.°: Si una recta encuentra á otra, encuentra á sus paralelas.—Corolario 2.°: Si una recta corta perpendicularmente á otra, es también perpendicular á sus paralelas.—Corolario 3.°: Si una recta es paralela á otra, lo es también á las paralelas de ésta.—Paralelas cortadas por secantes; definiciones de los diversos ángulos que se forman.—Teorema: Si una secante corta á dos paralelas, los cuatro ángulos agudos que resultan en los dos puntos de intersección son iguales, así como los cuatro ángulos obtusos.—Recíproca: Si dos rectas son cortadas por una secante y forman cuatro ángulos agudos ú obtusos iguales entre sí, las rectas son paralelas, siempre que los internos ó externos del mismo lado de la secante sean de distinta especie.—Caso en que los ángulos son rectos.—Corolarios: 1.° Si las rectas son paralelas, los ángulos alternos internos son iguales.—2.° Los alternos externos son iguales.—3.° Los correspondientes son iguales.—4.° Los internos de un mismo lado de la secante son suplementarios.—5.° Los externos del mismo lado de la secante son suplementarios.—6.° Recíprocamente: Dos rectas cortadas por una secante son paralelas cuando son iguales los ángulos alternos internos, ó los alternos externos, ó los correspondientes, ó bien si son suplementarios los ángulos del mismo lado de la secante, internos ó externos.—Escolio: Si dos rectas cortadas por una secante, forman ángulos internos de un mismo lado que no sean suplementarios, dichas rectas se cortan por el lado en que la suma de los ángulos es menor que dos rectos.—Consecuencias: 1.ª Si se trazan una perpendicular y una oblicua á una recta, ambas se cortan por el lado del ángulo agudo. 2.ª Si se trazan dos perpendiculares á dos rectas que se corten, dichas perpendiculares se han de cortar también.—Teorema: Los segmentos de paralelas comprendidos entre dos paralelas, son iguales.—Corolario: Dos rectas paralelas equidistan en toda su extensión. (Párrafos 34 al 46.)

Igualdad de polígonos.—Consideraciones que inducen á determinar la igualdad de dos polígonos, con el menor número de condiciones posible.—Dos polígonos de igual número de lados son iguales en cualquiera de los casos siguientes: 1.° Si tienen, de dos en dos, iguales todos los lados menos uno y todos los ángulos formados por lados iguales.—2.° Si tienen todos los ángulos menos uno, y todos los lados menos los que formen el ángulo exceptuado, son iguales de dos en dos en los dos polígonos.—3.° Si tienen iguales todos los lados y todos los ángulos menos tres consecutivos.—4.° Si tienen un lado igual é iguales, de dos en dos, las distancias de todos los vértices á los extremos de dichos lados.—5.° Si se componen del mismo número de triángulos iguales, de dos en dos, é igualmente dispuestos en cada polígono.—Escolio: Número de condiciones para determinar la igualdad de dos polígonos. (Párrafos 97 al 106.)

Problema.—Construir un triángulo isósceles, conociendo un lado y el ángulo en el vértice (Párrafo 202.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Homotecia.* Teorema: Dos sistemas son homotéticos si existen en su plano dos puntos tales que, uniendo uno de ellos con los puntos del primer sistema y el otro con los homólogos del segundo, resultan rectas paralelas respectivamente, y que estén en la misma relación.—Consecuencias: *a.* Dos poliedros semejantes de caras paralelas, son homotéticos.—*b.* Dos esferas son siempre homotéticas directas é inversas y los centros de homotecia dividen armónicamente á la línea de los centros.—Teorema: Dos sistemas homotéticos á un tercero, son homotéticos entre sí.—Consecuencias: *a.* Dos sistemas homotéticos de un tercero, con respecto á centros distintos y á una misma relación de homotecia, son iguales.—*b.* Los tres centros de homotecia están en línea recta.—Definición general de semejanza.—Consideraciones.—Consecuencias: 1.ª Figura homotética de una superficie cónica.—2.ª Idem de una superficie cilíndrica.—3.ª Conos de revolución ó cilindros de revolución semejantes.—4.ª Dos esferas son siempre semejantes, centros y relación de semejanza.—5.ª Semejanza de casquetes esféricos, zonas, husos, triángulos y polígonos esféricos. (Párrafos 812 al 816.)

Volúmenes.—Teorema: El volumen de un sector esférico es igual...—Teorema: El volumen de una esfera es igual...—Teorema: El volumen de una cuña esférica es igual...—Teorema: El volumen engendrado por un segmento circular, que gira alrededor de un diámetro exterior al mismo, equivale á la sexta parte del de un cilindro que tenga por radio la cuerda del segmento y por altura la proyección de esta cuerda sobre el eje. (Párrafos 881 al 885.)

Problema.—Por un punto trazar un plano perpendicular á una recta. (Párrafo 551.)

PAPELETA 34.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Angulos de lados paralelos ó perpendiculares.* Teorema: Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos, son iguales si tienen los lados paralelos dirigidos en el mismo ó en opuesto sentido, y suplementarios, si dos de sus lados están en el mismo sentido y los otros dos en opuesto.—Corolario: Dos ángulos cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios según sean de la misma ó de diferente especie. Observaciones sobre el paralelismo de dos rectas: 1.ª Cuando la secante gira disminuyendo el ángulo que forma con la paralela.—2.ª Magnitud de las secantes sucesivas.—Consecuencias: Dos rectas paralelas pueden considerarse como dos rectas que se cortan en el infinito, formando un ángulo igual á O.—Observaciones sobre las proposiciones recíprocas. (Párrafos 46 al 50.)

Comparación de áreas.—Teorema: El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.—Corolarios: 1.° Los cuadrados construídos sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, son proporcionales á las proyecciones de estos lados sobre la hipotenusa.—2.° Los cuadrados construídos sobre las cuerdas que parten de los extremos de un mismo diámetro, son proporcionales á las proyecciones de estas cuerdas sobre dicho diámetro. (Párrafos 417 al 419.)

Problema.—Transformar un triángulo dado en otro equivalente ó isósceles, conservando uno de sus ángulos (Párrafo 416.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Areas.*—Superficies curvas.—Consideraciones que conducen á referir el área de una superficie curva á la de una poliedral.—Teorema: El área de la superficie lateral de un cono de revolución, es igual á la mitad del producto de la circunferencia de la base por la generatriz.—Teorema: El área de la superficie lateral de un tronco de cono de revolución, de bases paralelas y de primera especie, es igual al producto de la semisuma de las circunferencias de las bases por la generatriz.—Corolario: Area del tronco, en función de sección paralela á las bases y equidistante de ellas. (Párrafos 825 al 830.)

Volúmenes.—Teorema: El volumen de una rebanada esférica equivale al de una esfera cuyo diámetro sea la altura de la rebanada, aumentando en el volumen de un cilindro que tenga la misma altura y por base la semisuma de las bases de aquélla.—Corolario: Volumen de un segmento esférico considerándolo como una rebanada.—Fórmula de Sipson. (Párrafos 885, 886 y 889.)

Problema.—Hallar el radio de una esfera sólida. (Párrafos 700 y 701.)

PAPELETA 35.ª

GEOMETRÍA PLANA.—*Polígono.*—Definiciones: Polígono; lados; perímetro; vértices; ángulos; diagonales; polígonos convexos y cóncavos; equiláteros; equiángulos; regulares; irregulares; clasificación de los polígonos por el número de lados. *Triángulos.*—Clasificación: por sus lados; por sus ángulos; base; altura; catetos; hipotenusa; designación de lados y ángulos.—Propiedades.—Teorema: En todo triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia; condición para formar un triángulo con tres rectas dadas.—Corolario: Si dos triángulos tienen un lado común y un lado del primero corta á un lado del segundo, la suma de los lados que no se cortan es menor que la de los que se cortan.—Teorema: Si un triángulo disminuye ó aumenta un ángulo, permaneciendo constantes los lados que lo forman, el lado opuesto disminuye ó aumenta también.—Corolario 1.°: Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales á dos del otro, el tercer lado del primero será mayor ó menor que el tercer lado del segundo, según que el ángulo opuesto á aquél sea mayor ó menor que el opuesto á éste.—Corolario 2.°: Si dichos ángulos fuesen iguales, los terceros deberían serlo.—Recíprocos del teorema y corolarios anteriores.—Teorema: En todo triángulo se verifica, que si un lado es mayor, igual ó menor que otro, el ángulo opuesto al primero estará en las mismas circunstancias respecto al opuesto al segundo.—Corolario: Si el triángulo es isósceles, á lados iguales se oponen ángulos iguales, y si es equilátero, es también equiángulo.—Recíprocos del teorema y corolario.—Escolio: Propiedades de que goza la altura de un triángulo isósceles.—Teorema: La suma de los tres ángulos de un triángulo, es igual á dos rectos.—Corolario: 1.° Un ángulo cualquiera de un triángulo es el suplemento de la suma de los otros dos.—2.° Si un triángulo tiene dos ángulos respectivamente iguales á dos ángulos de otro triángulo, los terceros ángulos son también iguales.—3.° Cualquier ángulo externo de un triángulo es igual á la suma de los dos que no le son adyacentes. 4.° Un triángulo sólo puede tener un ángulo recto ú obtuso.—5.° En un triángulo rectángulo los dos ángulos agudos suman...

plementarios.— 6.° Dos triángulos cuyos lados sean respectivamente paralelos ó perpendiculares, tienen sus ángulos respectivamente iguales. (Párrafos 50 al 66.)

Comparación de áreas.—Areas de figuras isoperímetras. Máximos y mínimos.—Teorema: Entre todos los triángulos que tengan la misma base y el mismo perímetro, el isósceles es el que tiene mayor superficie. – Corolario relativo al equilátero.—Teorema: Entre todos los triángulos de la misma base y superficie equivalente, el isósceles es el de perímetro mínimo. — Corolario relativo al equilátero.—Teorema: Si se dan dos lados para formar un triángulo, será de área máxima aquel en que el ángulo comprendido por dichos lados sea recto.—Teorema: Si se da la suma de los lados para formar un triángulo, será de área máxima aquel en que dicha suma se divida en dos partes iguales y estos lados estén en ángulo recto. (Párrafos 427 al 433.)

Problema. — Transformar un triángulo dado, en otro equivalente y equilátero. (Párrafo 447.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Areas.*—Teorema: El área de superficie lateral de un cilindro cualquiera es igual al perímetro de la sección recta por la generatriz.—Escolio: Cuando el cilindro sea de revolución, hallarla en función de la circunferencia de la base; ídem del radio de la base.—Teorema: El área de la superficie lateral de un tronco de cilindro de revolución, es igual á la circunferencia de su base multiplicada por el eje.—Areas totales del cono y tronco de cono de revolución y del cilindro de revolución. (Párrafos 830 al 833.)

Comparación de áreas.—Teorema: En dos poliedros semejantes, las áreas de sus superficies son proporcionales á los cuadrados de las líneas homólogas.—Teorema: Las áreas de las superficies laterales de dos conos de revolución semejantes de dos troncos de los mismos y de dos cilindros de revolución, también semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus generatrices ó de los radios de sus bases.—Teorema: Las áreas de dos casquetes semejantes, de dos zonas semejantes, de dos superficies esféricas, de dos husos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus radios. (Párrafos 890 al 893.)

Problema. — Hallar la menor distancia entre dos rectas que se cruzan. (Párrafo 555.)

PAPELETA 36.ª

GEOMETRÍA PLANA.— *Propiedades de los triángulos.*—Teorema: En todo triángulo se verifica que las perpendiculares trazadas á los lados en sus puntos medios, se cortan en un mismo punto que equidista, por consiguiente, de los tres vértices.— Corolario: En un triángulo rectángulo, el punto equidistante de los tres vértices es el punto medio de la hipotenusa. — Teorema: En todo triángulo se verifica, que las tres alturas se cortan en un mismo punto.—Corolario: Si el triángulo es rectángulo, las alturas se cortan en el vértice del ángulo recto.—Teorema: [illegible] y el de las bisectrices coinciden en uno solo. — Escolio: Considerar prolongados, más allá de los vértices, los tres lados del triángulo y determinar los puntos que equidistan de ellos. (Párrafos 66 al 73.)

Comparación de áreas. — Areas de figuras semejantes.—Teorema: Las áreas de dos triángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, ó la relación de dichas áreas es igual al cuadrado de la relación de semejanza.—Teorema: Las áreas de dos polígonos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, ó bien la relación de dichas áreas es igual al cuadrado de la relación de semejanza. Corolarios: 1.° Las áreas de dos polígonos regulares de igual número de lados, son proporcionales á los cuadrados de sus radios y apotemas.— 2.° El área del polígono construído sobre la hipotenusa, es igual á la suma de las áreas de los polígonos semejantes construídos sobre los catetos.— Teorema: Las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios, ó á los cuadrados de sus diámetros.—Corolarios: 1.° Si tomando como diámetro la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo se construyen tres círculos, se tendrá que el círculo construído sobre la hipotenusa... 2.° Lúnulas.—Teorema: Las áreas de dos sectores semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus radios. — Teorema: Las áreas de dos segmentos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus radios. (Párrafos 420 al 427.)

Problema.—Transformar un triángulo en otro equivalente que tenga su base en la dirección de la del lado, y por vértice un punto concedido. (Párrafo 445.)

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.—*Areas.*—Teorema: el área de la superficie engendrada por una recta limitada que gira alrededor de otra, situadas ambas en un mismo plano, y la primera en una sola región respecto á la segunda, es igual al producto de la proyección de la recta generatriz sobre el eje, por la circunferencia cuyo radio es la parte de perpendicular trazada á dicha generatriz en su punto medio, comprendida entre ésta y el eje.—Teorema: El área de la superficie engendrada por una línea quebrada regular, que gira alrededor de un eje situado en su plano y que pasa por su centro sin cortarla, es igual al producto de la circunferencia inscrita en la misma por la proyección de la generatriz sobre el eje.—Corolario: El área de la superficie engendrada por un arco de circunferencia que gira alrededor de un diámetro que no lo corta, es igual á la circunferencia á que pertenece dicho arco, multiplicada por la proyección de éste sobre el eje. (Párrafos 835 al 836.)

Comparación de volúmenes.—Teorema: Los volúmenes de dos prismas ó de dos pirámides son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.—Teorema: Los volúmenes de dos pirámides semejantes, son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.—Teorema: Los volúmenes de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.—Teorema: Los volúmenes de dos conos de revolución semejantes, de dos troncos de los mismos y de dos cilindros de revolución también semejantes, son proporcionales á los cubos de sus líneas homólogas. (Párrafos 893 al [illegible])

[illegible]

Trigonometría.—Texto: Gómez Pallete.

Undécima edición (1908).

PAPELETA 1.ª

ELEMENTOS QUE FIJAN LA POSICIÓN DE UN PUNTO.—Conveniencia y necesidad de aplicar á la Geometría los procedimientos algebraicos.—Determinación de la posición de un punto en una línea con relación á otro fijo.—Justificación de los signos que deben utilizarse.—Problema. Determinar la distancia entre dos puntos, considerada su posición con relación á un tercero, tomado como origen.—Principio de Descartes. (Párrafos 1 al 6.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Relaciones más usuales entre las líneas trigonométricas de un mismo ángulo.—Dado el seno de un ángulo, hallar el coseno y la tangente.—Dado el coseno, hallar el seno y la tangente.—Dada la tangente, hallar el seno y el coseno. (Párrafos 44 al 48.)

Problema.—Resolver un triángulo conocido un lado y los ángulos adyacentes. (Párrafo 95, primer caso.)

Ejemplo práctico:

$$A = 102° 37' 45'',6;\ B = 33° 41' 34'',5;\ c = 3812\ ^{m},857.$$

PAPELETA 2.ª

ELEMENTOS QUE FIJAN LA POSICIÓN DE UN PUNTO.—Comprobación de la regla de signos de Descartes, discutiendo el problema de dividir una recta en media y extrema razón. (Párrafo 6.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos ángulos iguales y de signos contrarios. (Párrafo 48.)

Problema.—Resolver un triángulo rectángulo, del que se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo. (Párrafo 94.)

Ejemplo práctico:

$$a = 367\ ^{m},45;\ B = 53° 7' 48'',4.$$

PAPELETA 3.ª

ELEMENTOS QUE FIJAN LA POSICIÓN DE UN PUNTO.—Posición de un punto situado en un plano.—Signos de las abscisas y ordenadas.—Fijar la posición de un punto cuyas coordenadas sean conocidas. (Párrafos 7 al 12.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Angulos complementarios. — Relación entre sus líneas trigonométricas. (Párrafos 49 y 50.)

Problema.—Resolver un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos (segundo caso).—Discusión, tomando en cuenta los valores angulares.—Obtener directamente el valor del lado desconocido.—Transformar los valores obtenidos para adaptarlos al cálculo logarítmico. (Párrafos 96 y 97.)

Ejemplo práctico:

$$a = 200^{m},19;\ b = 334^{m},85;\ A = 49° 33' 45'',7.$$

PAPELETA 4.ª

ELEMENTOS QUE FIJAN LA POSICIÓN DE UN PUNTO.—Posición de un punto en el espacio; sus planos coordenados; abscisas y ordenadas en el plano ó en el espacio.—Determinación de los signos.—Líneas quebradas que pueden seguirse, para llegar á un punto desde el orígen.—Fijar la posición de un punto cuando se conozcan las coordenadas. (Párrafos 12 al 17.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Problema.—Dados los senos y cosenos de dos ángulos, determinar el seno y coseno de su suma ó diferencia. (Párrafo 51.)

Problema.—Resolver un triángulo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido. (Párrafos 98 y 99.)

Ejemplo práctico:

$a = 3043^m,17$; $b = 5610^m,43$;
$G = 47° 45' 30'', 4.$

PAPELETA 5.ª

ELEMENTOS QUE FIJAN LA POSICIÓN DE UNA RECTA.—Posición de una recta en un plano.—Angulos positivos y negativos.—Discusión del ángulo formado por dos rectas. (Párrafos 17 al 21.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Problema.—Dado el seno y coseno de un ángulo, determinar el seno y coseno del ángulo doble y triple y las tangentes de $a \pm b$ y de $2a$. (Párrafos 52 al 56.)

Problema.—Resolver un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un cateto. (Párrafo 94, caso segundo.)

Ejemplo práctico:

$a = 8926^m,975$; $b = 7701^m,87.$

PAPELETA 6.ª

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.—Su necesidad.—Definición de las líneas trigonométricas. (Párrafos 21 al 25.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos ángulos suplementarios.—Idem íd. de los ángulos que se diferencian en π.—Alteración de los valores de las líneas trigonométricas de un ángulo, cuando se le agregan un número par ó impar de semicircunferencias. — Determinar las líneas trigonométricas de un ángulo en función de las de otro menor de 90°.—Aplicación al ángulo de 1726°.—Caso en que el ángulo sea negativo y aplicación al ángulo $\alpha = -1385°$. (Párrafos 56 al 59.)

Problema.—Resolver un triángulo cuando se conoce un cateto y un ángulo agudo. (Párrafo 94, caso tercero.)

Ejemplo práctico:

$b = 293^m,96$; $B = 53° 7' 48'', 4.$

PAPELETA 7.ª

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.—Estudio de los valores y signos de las líneas trigonométricas, cuando el ángulo varía desde cero á cuatro rectos; y agregando un número cualquiera de circunferencias —Límite de los valores de las líneas trigonométricas.—Obtención de los valores absolutos de las líneas trigonométricas de un ángulo mayor de 90°, en relación con las de otro menor que un recto. (Párrafos 25 al 29.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Transformar en producto la suma y diferencia de los senos y cosenos de dos ángulos.—Demostrar que la suma de los senos de dos ángulos, es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de estos ángulos es á la de la semidiferencia. (Párrafos 59 y 60.)

Problema.—Resolver un triángulo rectángulo, conociendo sus dos catetos. (Párrafo 94, caso cuarto.)

Ejemplo práctico:

$b = 423^m,747$; $c = 535^m,341.$

PAPELETA 8.ª

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS. — Dado el seno de un ángulo, determinar éste.—Dado el coseno, determinar el ángulo correspondiente. (Párrafos 29 y 30.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Fórmula de Moivre. (Párrafo 61.)

Problema.—Resolver un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.—Discusión.—Obtener directamente el valor del lado desconocido. Transformar los valores obtenidos para adaptarlos al cálculo logarítmico. (Párrafos 96 y 97.)

Ejemplo práctico:

$a = 358^m,25$; $b = 789^m,46$; $A = 77° 57' 14'',73$

PAPELETA 9.ª

PROYECCIONES DE LAS LÍNEAS RECTAS. Proyección de un punto sobre una recta. Idem de una recta sobre un eje.—Idem sobre tres ejes coordenados.—Suma algebraica de las proyecciones de una línea quebrada sobre un eje. (Párrafos 31 al 35.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Problema 1.º: Dado el coseno de un ángulo, determinar el seno y coseno de su mitad. (Párrafo 63.)

Problema.—Resolver un triángulo conociendo los tres lados.—Discusión. (Párrafos 100 al 104.)

Ejemplo prático:

$a = 3845^m, 30$; $b = 4451^m, 82$; $c = 4196^m, 07$

PAPELETA 10.ª

PROYECCIONES DE LÍNEAS RECTAS.—Proyección de una recta situada en el plano de dos ejes coordenados.—Valor de la proyección de una recta sobre otra en función de la magnitud de la primera y del ángulo formado con la segunda.—Medida del ángulo que forman dos rectas que se cruzan en el espacio y generalización de la fórmula anterior. (Párrafos 35 y 36.)

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.—Problema 2.º: Dado el seno de un ángulo, determinar el seno y coseno de su mitad.—Particularidad.—Caso en que el ángulo sea conocido y aplicación al valor de $a = 1650°$. (Párrafo 64.)

Problema.—Hallar el área de un triángulo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido. (Párrafo 104, caso primero.)

Ejemplo práctico:

$a = 5011^m,126$; $b = 4654^m,80$; $C = 5° 48' 55'',8$

PAPELETA 11.ª

PROYECCIONES DE LAS LÍNEAS RECTAS.—Hallar la distancia entre dos puntos dados, por sus coordenadas rectangulares. Idem si los dos puntos están colocados en uno de los planos de dos ejes.—Idem en el caso de que uno de los puntos coincida con el origen. (Párrafo 37.)

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS. — Descripción de las tablas trigonométricas de Schrön.—Uso de estas tablas cuando los ángulos ó las líneas están expresados en ellas. (Párrafos 73 al 78.)

Problema.—Hallar el área de un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos. (Párrafo 104, caso tercero.)

Ejemplo práctico:

$a = 827^m,42$; $b = 285^m,74$; $A = 79° 53' 50'', 26$

PAPELETA 12.ª

PROYECCIONES DE LAS LÍNEAS RECTAS.—Valor de la suma de los cuadrados de los cosenos de los ángulos que una recta forma con tres ejes rectangulares.—Valor de la proyección octogonal sobre un eje de la recta que una los extremos de una quebrada. (Párrafos 38 y 39.)

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.—Problema directo del manejo de las tablas para ángulos mayores de 3° y menores que 87°. (Párrafos 78 y 79.)

Problema.—Hallar el área de un triángulo cuando se conozcan dos ángulos y un lado. (Párrafo 104, caso segundo.)

Ejemplo práctico:

$A = 25° 32' 48'',36$; $B = 118° 4' 37'',86$;
$a = 396^m, 54.$

PAPELETA 13.ª

PROYECCIONES DE LÍNEAS RECTAS. — Problema 1.º: Dadas las coordenadas de un punto con relación á tres ejes cualesquiera, determinar la abscisa octogonal del mismo punto con respecto á una recta que pasando por el origen forme con los ejes ángulos conocidos. (Párrafo 40.)

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.—Problema inverso del manejo de las tablas para ángulos mayores de 3° y menores que 87°. (Párrafos 80 al 83.)

Problema.—Hallar el área de un triángulo cuando se conocen los tres lados. (Párrafo 104, caso cuarto.)

Ejemplo práctico:

$a = 5387^m,483$; $b = 3062^m,765$;
$c = 3812^m,857.$

PAPELETA 14.ª

PROYECCIONES DE LAS LÍNEAS RECTAS.—Problema 2.º: Determinar el ángulo de dos rectas, conocidos los que forman con tres ejes coordenados rectangulares.—Caso en que las rectas estén situadas en el plano de los ejes ó paralelo á él.—Caso en que las rectas sean perpendiculares entre sí. (Párrafos 41 al 44.)

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO RECTILÍNEO.—Demostrar á qué es igual el cuadrado de un lado.—Idem que los senos de dos ángulos son proporcionales á los lados opuestos. (Párrafos 83 al 87.)

Problema.—Resolver un triángulo conociendo un lado y dos ángulos. (Párrafo 95.)

Ejemplo práctico:

$A = 123° 3' 47'',2$; $B = 51° 7' 17''$; $c = 605^m,862.$

PAPELETA 15.ª

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.—Valores de las líneas trigonométricas, cuando el ángulo α crece de cero grados á cuatro rectos y cuando se le aumenta un número cualquiera de circunferencias. (Párrafos 25 al 27.)

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO RECTILÍNEO. — Demostrar que la suma de dos lados es á su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es á la de la semidiferencia. — Demostración analítica de que el conocimiento de los tres ángulos no determina el triángulo. (Párrafos 87 y 88.)

Problema.—Resolver un triángulo rectángulo del que se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo. (Párrafo 94, caso primero.)

Ejemplo práctico:

$a = 8926^m,975$; $C = 30° 22' 18'', 1.$

PAPELETA 16.ª

ELEMENTOS QUE FIJAN LA POSICIÓN DE UN PUNTO.—Aplicar la regla de signos de Descartes al problema de dividir una recta en media y extrema razón, discutiendo las distintas hipótesis que pueden hacerse. (Párrafo 6.°)

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO RECTILÍNEO.—Demostrar que en un triángulo rectángulo, un cateto es igual á la hipotenusa multiplicada por el coseno del ángulo adyacente ó por el seno del opuesto.—Idem que un cateto es igual al otro, multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero. (Párrafo 89.)

Problema.—Resolver un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido. (Párrafos 98 y 99.)

Ejemplo práctico:

$b = 572^m,76$; $c = 3256^m,46$; $A = 107^o 42' 30'',2$

PAPELETA 17.ª

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO RECTILÍNEO.—Transformar en producto la suma ó diferencia de dos cantidades positivas.—Transformar en monomio un binomio de la forma A cos $\alpha \pm B$ sen α. (Párrafos 90 al 94.)

Problema.—Resolver los cuatro casos del triángulo rectángulo. (Párrafo 94.)

Ejemplo práctico de uno de ellos:

$a = 682^m,753$; $b = 423^m,747$.

Madrid, 14 de Marzo de 1911.=Aznar.

MINISTERIO DE INSTRUCCIÓN PÚBLICA Y BELLAS ARTES

REALES ÓRDENES

Ilmo. Sr.: S. M. el REY (q. D. g.) ha resuelto declarar desierto el concurso de traslación anunciado para proveer la Cátedra de Enfermedades de la infancia, vacante en la Universidad de Santiago; toda vez que los aspirantes D. Vicente Goyanes, D. Angel Martínez de la Riva y D. Antonio Novo Campels, no reunen la condición exigida en el artículo 5.° del Real decreto de 24 de Abril de 1908, puesto que ni desempeñan ni han desempeñado en propiedad Cátedra igual á la vacante.

De Real orden lo digo á V. I. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. I. muchos años. Madrid, 7 de Marzo de 1911.

SALVADOR.

Señor Subsecretario de este Ministerio.

Ilmo. Sr.: En el expediente de concurso de ascenso entre Auxiliares para proveer la plaza de Profesora numeraria de la Sección de Letras de la Escuela Normal de Maestras de Cuenca:

Resultando que la única aspirante presentada á este concurso es D.ª María de los Desposorios Gutiérrez y Alonso, que fué nombrada Auxiliar de la Sección de Letras de la Normal de Salamanca, por orden de la Subsecretaría de Instrucción Pública de 1.° de Enero de 1902, sin previa oposición:

Considerando que el párrafo segundo de la Real orden de convocatoria establece que sólo podrán aspirar á esta plaza las Auxiliares de la Sección de Letras de las Escuelas Normales que hubieran ingresado por oposición,

S. M. el REY (q. D. g.) se ha servido disponer:

1.° Que no se admita al concurso á la señora Gutiérrez y Alonso; y

2.° Que se declare desierto el concurso por falta de aspirantes.

De Real orden lo digo á V. I. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. I. muchos años. Madrid, 15 de Marzo de 1911.

SALVADOR.

Señor Director general de Primera enseñanza.

Ilmo. Sr.: S. M. el REY (q. D. g.) ha tenido á bien nombrar, en virtud de concurso de traslación, á D. Francisco Javier González Sarriá, Catedrático de Reconocimiento de Productos comerciales y Prácticas de Laboratorio de la Escuela Superior de Comercio de Valladolid, con el sueldo anual de 3.000 pesetas, como comprendido en el caso 1.° del artículo 7.° del Real decreto de 24 de Abril de 1908, por hallarse desempeñando, en virtud de directa oposición, la Cátedra de la misma asignatura en la Escuela Superior de Comercio de Zaragoza.

De Real orden lo digo á V. I. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. I. muchos años. Madrid, 21 de Marzo de 1911.

SALVADOR.

Señor Subsecretario de este Ministerio.

Méritos y servicios de D. Francisco Javier González Sarriá.

Catedrático, en virtud de oposición, de Reconocimiento de Productos comerciales y Prácticas de Laboratorio de la Escuela Superior de Comercio de Zaragoza, por Real orden de 19 de Febrero de 1908.

Ilmo. Sr.: S. M. el REY (q. D. g.) ha tenido á bien nombrar, en virtud de concurso de traslación, á D. Francisco Jaén del Pino, Catedrático de Teneduría de libros y Contabilidad de Empresas de la Escuela Superior de Comercio de Sevilla, con el sueldo anual de 3.000 pesetas, como comprendido en el caso 1.° del artículo 7.° del Real decreto de 24 de Abril de 1908, por hallarse desempeñando, en virtud de directa oposición, la Cátedra de la misma asignatura en la Escuela Superior de Comercio de Valladolid.

De Real orden lo digo á V. I. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. I. muchos años. Madrid, 21 de Marzo de 1911.

SALVADOR.

Señor Subsecretario de este Ministerio.

Méritos y servicios de D. Francisco Jaén del Pino.

Por Real orden de 20 de Mayo de 1908, fué nombrado, en virtud de oposición, Catedrático numerario de Teneduría de libros y Contabilidad de Empresas de la Escuela Superior de Comercio de Jovellanos, de Gijón.

Por Real orden de 10 de Febrero de 1909, se le nombró, en virtud de concurso de traslación, para la misma asignatura en la Escuela Superior de Comercio de Zaragoza, pasando después por permuta á la de Valladolid.

Antes de su ingreso en el Profesorado fué nombrado, por concurso, por Real orden de 18 de Noviembre de 1905, Auxiliar de la Escuela Superior de Comercio de la Coruña.

Por Real orden de 4 de Septiembre de 1907 pasó, por concurso, á la Escuela de Comercio de Palma de Mallorca, con el cargo de Profesor Auxiliar.

Por orden de la Subsecretaría de 8 de Octubre de 1907, fué nombrado Secretario de esta última Escuela.

Ha sido juez de varias oposiciones á Cátedras.

Es autor de un libro titulado «Sistemas de Contabilidad», que mereció informe laudatorio de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Está en posesión del título profesional de Catedrático y de los de Profesor Mercantil y Bachiller en Artes.

Tiene prestados diferentes servicios como Ayudante interino de la Escuela de Comercio de Málaga, que fué el primer nombramiento que obtuvo en la enseñanza.

Ilmo. Sr.: No habiendo obtenido mayoría absoluta de votos aspirante alguno de los que han tomado parte en los ejercicios de oposición á la Cátedra de Mineralogía y Botánica, con su acumulada de Zoología general, vacante en la Sección de Ciencias, sostenida por el Ayuntamiento de Cádiz,

S. M. el REY (q. D. g.) ha resuelto no haber lugar á adjudicar la referida Cátedra, que se anunciará al turno que le corresponda, á tenor de lo prevenido en el artículo 1.° del Real decreto de 24 de Abril de 1908, en relación con el Real decreto de 21 de Julio de 1909.

De Real orden lo digo á V. I. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. I. muchos años. Madrid, 23 de Marzo de 1911.

SALVADOR.

Señor Subsecretario de este Ministerio.

Ilmo. Sr.: Remitido á informe de la Comisión calificadora, nombrada por Real orden de 21 de Septiembre de 1910, el expediente instruído á instancia del Auxiliar numerario de la Facultad de Medicina de Cádiz, D. Joaquín Isorna y Soto, en solicitud de que por hallarse comprendido en el Real decreto de 26 de Agosto de 1910, se le conceda la propiedad de la Cátedra de Terapéutica de la misma Facultad, dicha Comisión emitió en 24 de Febrero el siguiente dictamen:

«Vistos la instancia y expediente de D. Joaquín Isorna y Soto, Profesor Auxiliar de la Facultad de Medicina de Cádiz, en solicitud de que sea nombrado Catedrático numerario de Terapéutica de dicho Centro docente, á tenor de lo dispuesto en el artículo 2.° del Real decreto de 26 de Agosto último y Real orden aclaratoria de 21 de Septiembre siguiente:

»Resultando que el interesado elevó su solicitud en tiempo y forma hábiles:

»Resultando que, en efecto, según aparece en su hoja de servicios, es Profesor auxiliar numerario desde el 13 de Enero de 1902, y, por lo tanto, lleva más de ocho años en el ejercicio del cargo:

»Resultando, según consta igualmente en la referida hoja de servicios, que el Sr. Isorna tiene explicado, entre varias sustituciones, 13 cursos completos, cuatro meses y dieciséis días durante el tiempo en que es Auxiliar numerario:

»Resultando que de los mencionados, más de 10 cursos completos lo han sido sin interrupción uno, seis meses y cinco días en la asignatura de Obstetricia y Ginecología; uno, un mes y veintitrés días en la de Enfermedades de la infancia, y seis cursos y veintiséis días en la de Terapéutica:

»Resultando que de la asignatura de Terapéutica se hallaba y se halla encargado al publicarse el Real decreto de 26 de Agosto y la Real orden aclaratoria de 21 de Septiembre últimos, y que dicha Cátedra no estaba ni está anunciada á oposición:

»Considerando que las dos Reales disposiciones antes citadas conceden derecho á ser nombrados Catedráticos numerarios de las asignaturas que á la sazón estuviesen desempeñando, á los Auxiliares numerarios, siempre que llevasen ocho años de antigüedad en el cargo, hubiesen explicado durante el tiempo de Auxiliar numerario más de 10 cursos computados entre una ó varias sustituciones, de los cuales más de uno completo y sin interrupción lo sea en la asignatura que solicitan; todo ello no mediando perjuicio de tercero, como el de existir oposiciones anunciadas con Tribunales nombrados y aspirantes:

»Considerando que las circunstancias antes dichas concurren en D. Joaquín Isorna y Soto, y que la Cátedra de Terapéutica de que pretende ser nombrado Catedrático numerario, no se halla anunciada á oposición ni á concurso:

»Considerando que tanto el Decano de la Facultad de Medicina de Cádiz, como el Rector de la Universidad de Sevilla, informan de la manera más favorable al interesado la pretensión de éste; y que en la hoja de servicios del mismo aparecen otras muchas circunstancias que demuestran el mérito y los merecimientos de D. Joaquín Isorna y Soto,

»La Comisión calificadora tiene el honor de proponer que procede nombrar al Sr. Isorna Catedrático numerario de la asignatura de Terapéutica, vacante en la Facultad de Medicina de Cádiz.»

Y conformándose con el preinserto dictamen, S. M. el Rey (q. D. g.) ha resuelto nombrar á D. Joaquín Isorna y Soto, Catedrático numerario de Terapéutica de la Facultad de Medicina de Cádiz, con el haber anual de 4.000 pesetas y demás ventajas de la ley.

Por consecuencia de este nombramiento, y de conformidad con lo preceptuado en el artículo 1.° del Real decreto de 31 de Julio de 1904, se declara vacante la plaza de Auxiliar numerario que el interesado viene desempeñando en la misma Facultad.

De Real orden lo digo á V. I. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. I. muchos años. Madrid, 23 de Marzo de 1911.

SALVADOR.

Señor Subsecretario de este Ministerio.

Ilmo. Sr.: De conformidad con el dictamen de la Comisión calificadora nombrada por Real orden de 21 de Septiembre de 1910,

S. M. el Rey (q. D. g.) ha resuelto desestimar la solicitud de los Auxiliares numerarios de las Universidades de Sevilla, Valencia y Zaragoza, respectivamente, D. Feliciano García y García, D. José Puig y Boronat y D. Alvaro de San Pío y Ausón, en cuanto á ser nombrados Catedráticos numerarios; reconociendo á los referidos Auxiliares el derecho á obtener por concurso Cátedras de número de la Facultad de Filosofía y Letras, por reunir las circunstancias que determina el Real decreto de 26 de Agosto de 1910.

De Real orden lo digo á V. I. para su conocimiento y demás efectos. Dios guarde á V. I. muchos años. Madrid, 24 de Marzo de 1911.

SALVADOR.

Señor Subsecretario de este Ministerio.

MINISTERIO DE FOMENTO

REAL ORDEN

Ilmo. Sr.: La Junta consultiva de Seguros ha examinado el escrito presentado por la Sociedad La Previsión Popular en 25 de Febrero último, en consulta, entre otros extremos, de si han de extenderse en papel timbrado los escritos y comunicaciones que las entidades aseguradoras dirijan á la Inspección de Seguros.

Entiende la Junta, de conformidad con el informe de la Inspección en cuya demarcación se encuentra el domicilio social de la entidad La Previsión Popular, que el texto de los preceptos de la vigente ley del Timbre y del Reglamento de 29 de Abril del año último, especialmente lo dispuesto en los artículos 29, número 4.° de la Ley y 41 del Reglamento, dado el carácter de oficina dependiente del Estado que la Inspección y Junta consultiva de Seguros tienen, será necesario el reintegro en todo documento de carácter oficial que á las citadas dependencias se dirijan, y á los efectos de que esta consulta sea conocida de todas las entidades sometidas á la Ley de 14 de Mayo de 1908, procede, si la Superioridad así lo considera, se dicte una Real orden de carácter general, que corrobore en la forma indicada la circular de la Comisaría de 16 de Junio del año último.

Entiende, por último, esta Junta, en cuanto al caso concreto de la Sociedad La Previsión Popular se refiere, y teniendo en cuenta que el domicilio social de la misma reside en territorio concertado á los efectos fiscales, que igualmente á ella afectan estas disposiciones de la vigente ley y Reglamento del Timbre, visto lo dispuesto en la disposición adicional 5.ª del Reglamento de 29 de Abril de 1909.

En resumen, la Junta tiene el honor de someter á V. E. se dicte una Real orden de carácter general y obligatoria á todas las Sociedades sometidas al régimen de la Ley de 14 de Mayo de 1908, determinando la obligación en que se encuentran de reintegrar con el oportuno timbre, las comunicaciones y escritos oficiales que se dirijan á la Comisaría y Junta consultiva de Seguros.

Y conformándose S. M. el Rey (q. D. g.) con el preinserto dictamen, se ha servido disponer como en el mismo se propone.

De Real orden lo digo á V. I. para su conocimiento y efectos. Dios guarde á V. I. muchos años. Madrid, 20 de Marzo de 1911.

GASSET.

Ilmo. Sr. Comisario general de Seguros.

ADMINISTRACIÓN CENTRAL

MINISTERIO DE HACIENDA

Junta clasificadora de las obligaciones procedentes de Ultramar.

SECRETARÍA

Esta Junta ha acordado, en sesión del día 14 del actual, anular el resguardo nominativo número 49.061, expedido por la Ordenación de pagos del Ministerio de la Guerra á favor del acreedor Miguel Casasnovas Amorós, que figura con el número 2 de la relación 5.914, publicada en la Gaceta de Madrid de 25 de Julio de 1910

Lo que se publica en la Gaceta de Madrid á los efectos oportunos.—Madrid, 22 de Marzo de 1911: El Secretario, J. Infante.—V.° B.°: El Presidente, P. S., Alisal.

Dirección General de la Deuda y Clases Pasivas.

Los individuos de Clases Pasivas que tienen consignado el pago de sus haberes en la Pagaduría de esta Dirección, pueden presentarse á percibir la mensualidad corriente, desde las doce de la mañana á las cuatro de la tarde, en los días y por el orden que á continuación se expresan:

Día 1.º de Abril de 1911.

Montepío Militar, de la R á la Z. Montepío Civil, de la R á la Z. Capitanes. Plana Mayor de Jefes.

Día 2.

Cruces.

Día 3.

Montepío Civil, de la E á la Ll. Tropa.

Día 4.

Montepío Militar, de la A á la E. Montepío Civil, de la A á la D. Coroneles. Tenientes Coroneles.

Día 5.

Montepío Militar, de la F á la Ll. Jubilados. Comandantes.

Día 6.

Montepío Militar, de la M á la Q. Montepío Civil, de la M á la Q. Tenientes. Alféreces. Marina. Cesantes. Secuestros. Remuneratorias.

Nota.—En los días 7 y 8 se pagarán las nóminas de Altas, Supervivencia, Extranjero y todas las nóminas sin distinción, y el día 10 las de retenciones.

OBSERVACIONES

1.ª No se abonará haber ni pensión alguna sin que los perceptores exhiban al pagador las nominillas ó papeletas de cobro;

2.ª Las viudas y huérfanos deberán entregar en la Pagaduría, en el momento del cobro, los certificados de existencia y estado expedidos por los Jueces municipales del distrito á que pertenezcan, desde el día 25 del actual en adelante;

3.ª No se admitirá certificado alguno que carezca de la declaración suscrita por el interesado ó interesados si son dos ó más los partícipes, de que no perciben otro haber de fondos generales, provinciales, municipales ni pasivos de la Real Casa, debiendo los apoderados estampar su firma al pie de la propia declaración como garantía de que han recibido el citado documento directamente de su poderdante y de que responden de la identidad de las firmas de los mismos;

4.ª Los apoderados de acreedores que por su categoría justifiquen mediante oficio, estamparán en él su firma con igual objeto;

5.ª Los que justifiquen fuera de esta Corte, tendrán cuidado de expresar en el justificante, no sólo el pueblo, sino también la provincia á que éste corresponda;

6.ª Cuando algún perceptor no sepa firmar, lo harán á su ruego y presencia y á satisfacción del Pagador, dos particulares que perciban haberes, ó dos contribuyentes, haciendo constar la clase á que pertenezcan;

7.ª Para el pago de retenciones, se exigirá á todos los acreedores que perciban desde tres en adelante la presentación del justificante de haber satisfecho el último trimestre de la contribución industrial como prestamista; llenando igual requisito los que cobren como apoderados de un prestamista.

Los que alegasen no haber hecho operaciones de préstamo con posterioridad á la fecha del último recibo, lo justificarán presentando la papeleta de su baja en esta industria.

Los representantes de Bancos ó Sociedades anónimas que prestan sobre sueldos y pensiones autorizados por sus Estatutos, deberán acreditar al cobrar de las retenciones hechas á su favor, que los establecimientos acreedores se hallan al corriente en el pago á la Hacienda de la contribución que les corresponde.

Madrid, 27 de Marzo de 1910.—El Director general, Cenón del Alisal.

MINISTERIO DE FOMENTO

Dirección General de Obras Públicas.

CARRETERAS
CONSERVACIÓN Y REPARACIÓN

Examinado el presupuesto adicional al aprobado por Real orden de 21 de Octubre de 1909, para el acopio de piedra machacada para la reparación de los kilómetros 13 al 26 de la carretera de Madrid á Cádiz, provincia de Madrid, encontrándose redactado con arreglo á condiciones y justificadas todas las partidas,

S. M. el Rey (q. D. g.), conformándose con lo propuesto por esta Dirección General, se ha servido aprobarlo por su presupuesto de 25.193,28 pesetas, en cuya cantidad van incluídos el 1 y 2 por 100 de gastos imprevistos y accidentes del trabajo, y además 747,52 pesetas para pago de indemnizaciones del personal, cuya obra se hará desde luego por Administración, con cargo al capítulo 20, artículo 2.º, concepto 2.º del presupuesto vigente.

De orden del señor Ministro lo digo á V. S. para su conocimiento y efectos. Dios guarde á V. S. muchos años. Madrid, 23 de Marzo de 1911.=El Director general, P. O., R. G. Rendueles.

Señor Ordenador de Pagos por Obligaciones de este Ministerio.

MADRID.—Est. Tip. "Sucesores de Rivadeneyra"—Paseo de San Vicente, núm. 20.